

Ice Shell Structures の研究*

第3報 Ice Domes の軸対称クリープ座屈解析

粉 川 牧**

A Study on Ice Shell Structures

Part 3 Axisymmetric Creep Buckling Analysis of Ice Domes

Tsutomu KOKAWA

Abstract

As described in previous papers, the short term strength of Ice Shell may have enough load carrying capacity. However, snow-ice material is not a perfect elastic solid. Since snow-ice has also the mechanical property of liquid, it is important to investigate creep buckling collapse of Ice Shell which is loaded for a long time.

As the first step towards throwing theoretical lights upon the creep buckling phenomenon of Ice Shells, the author has developed the axisymmetric creep buckling analysis of Ice Domes under the concentric distributed load with the apex, based upon the following assumptions.

1. Constitutive law of snow-ice material obeyed a linear Maxwell's model.
2. Sanders' nonlinear thin shell theory.

§ 1 序

北方圏の Temporary Roofs として雪氷を構造材料とする曲面構造物, 所謂 Ice Shell が提案され, 前報⁽¹⁾及び既論文⁽²⁾では, 短時間加力に対する Ice Domes の力学的性状が実験的及び理論的に検討された。その結果, 比較的大スパンの Ice Shell が構造的に充分可能であることに自信を深めた。

ところで, 雪氷材料は単なる弾性体と異なり, 粘性流動の性質も合わせもつものであるから, 自重及び積雪荷重の様に長時間にわたり荷重が作用すると, 構造物としての Ice Shell も顕著なクリープ挙動を示す。この場合, 時間と共に Shell 変形が増大し, 載荷開始から一定時間経過後崩壊することが理論的に予測され, 筆者らの行った実験^{(2),(3),(4)}でもその現象が確認されている。従って, 高温下に於ける金属

殻の場合⁽⁵⁾と同様, クリープ崩壊に対する安全性の評価が設計上極めて重要と思われる。しかしながら, Ice Domes のクリープ座屈崩壊に関する理論的研究は筆者の知るところ皆無で, 僅かにクリープ変形解析が線形膜理論に基づき行われている⁽⁶⁾のが現状である。

本報告は筆者らの実験でよく用いられてきた周辺固定の Ice Domes に集中的等分布荷量を載荷した場合のクリープ座屈に関する理論的解明の第一歩として軸対称クリープ座屈解析法を示したものである。

§ 2 理論解析

1 雪氷材の構成方程式

雪氷材の定温, 定応力下の一軸クリープに於いて, Transient, Secondary, Tertiary の各段階が存在するが, ここでは, そのうち Secondary クリープ

*受理 昭和58年11月5日

**北海道東海大学芸術工学部建築学科助教授

変形が支配的であると考え、雪氷材の構成方程式を Norton-Bailey の流動則⁽⁷⁾で与える。即ち、

$$\dot{\epsilon} = k\sigma^n \dots\dots\dots (1)'$$

ここに ϵ : 歪・ $= \frac{d}{dt}$, t : 時間, k : 定数, σ : 一軸圧縮 or 引張応力度, n : クリープ指数。

文献(8)によれば、雪氷材の一軸定常クリープにおいてクリープ指数 : n は応力度の大きさと関係する様である。即ち、応力度が約 2 kg/cm^2 以上の場合はほぼ 3, それより低い範囲では 1 ~ 2 程度とされているが、特に後者の低応力の場合は実験技術上困難なことが多く未だ定説はない^{(8),(9)}。ここでは対象とする Ice Shell の応力レベルは低いと考えられ、又、数学的解析の困難さを避け且つ現象の大スジを見失わないとの理由で、雪氷材の構成式として $n = 1$ 即ち線形 Maxwell Model (図-1 a 参照)を採用する。

$$\dot{\epsilon} = \eta\sigma \dots\dots\dots (1)$$

ここに η は式 (1) の k を書き換えたものでクリープ係数である。さらに多軸応力状態では Odqvist's Law (不変量理論)⁽⁷⁾ が成立すると仮定する。

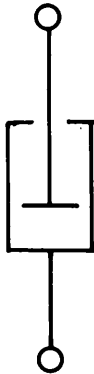


図-1 a 線形 Maxwell Model

2 基礎方程式

雪氷材の構成式が式 (1) で与えられるとし、図-1 b に示す様な集中的等分布荷重をうける周辺固定 Ice Domes の軸対称クリープ変形を支配する基礎方程式を誘導する。

微小歪微小回転仮定に基づく Sander's のShell 理論⁽¹⁰⁾ に次の近似化を行う。即ち①中央面歪一変位の回転項 (非線形項) に於いて経線方向変位を省略

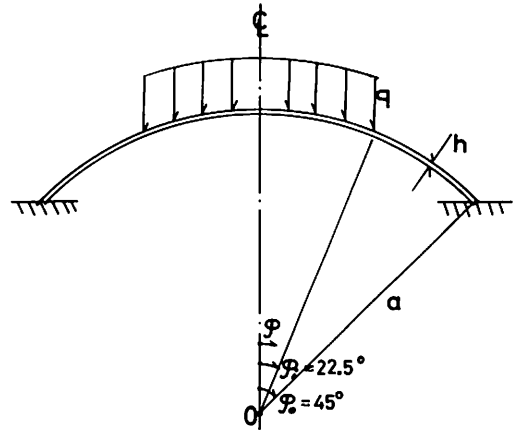


図-1 b 解析モデル

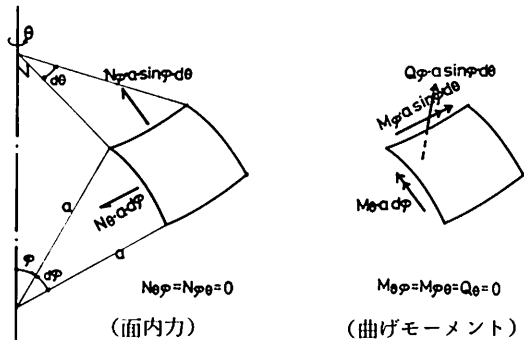


図-1 c 合 応 力

する。②経線方向力の釣合式は線形とする。③曲げ歪は可展開⁽¹¹⁾とする。さらに諸式の変形と微小項の省略を行い、結局 Φ と W に関する基礎方程式 (2), (3) を得る。

適合条件式 :

$$\begin{aligned} & H_2 H_0(\Phi) + H_2(\dot{W}) \\ &= \frac{1}{\lambda} \left\{ 2 W' \dot{W}' - \cot \varphi \cdot (W' \dot{W}') \right\} \dots\dots\dots (2) \end{aligned}$$

法線方向釣合式

$$\begin{aligned} & H_2 H_2(\dot{W}) - 9 \lambda^2 H_2(\Phi) = 27 \lambda^4 \eta q \xi(\varphi) \\ &+ \frac{9 \lambda}{\sin \varphi} \left[W' \sin \varphi \left\{ \cot \varphi \cdot \Phi' + \Phi - \frac{1}{9 \lambda^2} H_2(\dot{W}) \right. \right. \\ &\left. \left. + \eta q \lambda^2 r(\varphi) \right\} \right]' \dots\dots\dots (3) \end{aligned}$$

ここに、 $\varphi' = \frac{d}{d\varphi}$ 、 Φ ：無次元応力関数、 W ：無次元法線方向変位 ($= \frac{w}{h}$)、 w ：法線方向変位、 h ：板厚、 $\lambda = \frac{a}{h}$ 、 a ：曲率半径、 q ：単位面積あたりの鉛直方向荷重の大きさ、 $H_2(\cdot) = (\cdot)'' + \cot \varphi \cdot (\cdot)' + 2(\cdot)$ 、 $H_0(\cdot) = H_2(\cdot) - 2(\cdot)$ 、 $\xi(\varphi) = \begin{cases} \cos \varphi & \varphi < \varphi_i \\ \frac{2}{3} \cos \varphi_i & \varphi \geq \varphi_i \end{cases}$ 、 $r(\varphi) = \begin{cases} \cos \varphi & \varphi < \varphi_i \\ \cos \varphi_i & \varphi \geq \varphi_i \end{cases}$

式(2)を時間で積分すると弾性球殻の適合条件式と一致するが、法線方向釣合式に於いて両者の一致は見られない⁽¹²⁾。これは、本問題に於いて弾性アナロジー⁽¹³⁾が成立していないことを示している。

合応力(図-1c参照)及面内歪は Φ 、 W を用いて次式で表せる。

$$\left. \begin{aligned} N_\varphi &= \frac{h^2}{a\eta} \left\{ \Phi' \cot \varphi + \Phi - \frac{1}{9\lambda^2} H_2(\dot{W}) + \eta q \lambda^2 r(\varphi) \right\} \\ N_\theta &= \frac{h^2}{a\eta} \left\{ \Phi'' + \Phi - \frac{1}{9\lambda^2} H_2(\dot{W}) + \eta q \lambda^2 r(\varphi) \right\} \\ M_\varphi &= -\frac{h^2}{9\lambda^2 \eta} \left\{ (\dot{W}'' + \dot{W}) + \frac{1}{2} (\cot \varphi \cdot \dot{W}' + \dot{W}) \right\} \\ M_\theta &= -\frac{h^2}{9\lambda^2 \eta} \left\{ (\cot \varphi \cdot \dot{W}' + \dot{W}) + \frac{1}{2} (\dot{W}'' + \dot{W}) \right\} \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1}{\lambda} \left\{ \Phi'' - \frac{1}{2} \cot \varphi \cdot \Phi' + \frac{1}{2} \Phi - \frac{1}{18\lambda^2} H_2(\dot{W}) + \frac{1}{2} \eta q \lambda^2 r(\varphi) \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots (4)$$

さらに、 $\eta q t = \alpha$ 、 $\Delta = \frac{d}{d\alpha}$ 、 $\Phi \cdot t = F$ とおき式(2)、(3)を変形すると新たに次の無次元化基礎方程式(5)、(6)を得る。

適合条件式：

$$H_2 H_0(F) + \alpha \cdot H_2(\dot{W}) = \frac{\alpha}{\lambda} \left\{ 2 W' \dot{W}' - \cot \varphi (W' \dot{W}')' \right\} \dots\dots (5)$$

法線方向釣合式：

$$\alpha H_2 H_2(\dot{W}) - 9 \lambda^2 H_2(F) = 27 \lambda^4 \alpha \xi(\varphi)$$

$$+ \frac{9 \lambda}{\sin \varphi} \left[W' \left\{ \cot \varphi \cdot F' + F - \frac{\alpha}{9 \lambda^2} H_2(\dot{W}) + \alpha \lambda^2 r(\varphi) \right\} \sin \varphi \right] \dots\dots (6)$$

式(5)、(6)より、本解析理論の枠内では、無次元クリープ座屈値： $\alpha_{cr} (= (\eta q t)_{cr})$ は λ の関数で与えられることが分かる。

3 数値解析法

基礎方程式(2)、(3)は φ 、 t を独立変数とし Φ 、 W に関する非線形偏微分方程式であるが、右辺(非線形項も含む。)を強制項とみなし線形方程式の如く扱い、解を余解と特解の和で表すことによって解析を進める⁽¹⁴⁾。

a. 余解： Φ_h 、 $\dot{W}_h$ 余解は方程式(7)、(8)の解である。

$$H_2(\dot{W}_h) + H_2 H_0(\Phi_h) = 0 \dots\dots (7)$$

$$H_2 H_2(\dot{W}_h) - 9 \lambda^2 H_2(\Phi_h) = 0 \dots\dots (8)$$

式(7)、(8)より Φ_h を消去すると、

$$H_2 H_2 H_0(\dot{W}_h) + 9 \lambda^2 H_2(\dot{W}_h) = 0 \dots\dots (9)$$

式(9)は次の二つの方程式(10)、(11)に分解される。

$$(H_0 - p_1)(H_0 - p_2) \dot{W}_{h1} = 0 \dots\dots (10)$$

$$H_2(\dot{W}_{h2}) = 0 \dots\dots (11)$$

$$\text{ここに } p_2 = -1 \pm i \sqrt{9 \lambda^2 - 1}, \quad i = \sqrt{-1}$$

式(10)の解は、本問題の場合 $\varphi = 0$ において有限、さらに共役であることを考慮して、式(12)の様に書ける。

$$\dot{W}_{h1} = P_\mu \dots\dots (12)$$

ここに P_μ は複素数次の第一種 Legendre 関数で次の微分方程式(13)の解である。

$$H_0(P_\mu) + \mu(\mu+1)P_\mu = 0, \text{ 但し, } \mu = \frac{-1 \pm \sqrt{5 - i 4 \sqrt{9 \lambda^2 - 1}}}{2} \dots\dots (13)$$

式(13)より明らかに $P_\mu = P_{-\mu-1}$ が成立。又、 P_μ はGaußの超幾何級数 G で表すと次の様になる⁽¹⁵⁾。

$$P_\mu(z) = G(-\mu, \mu+1, 1; \frac{1-z}{2}) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(\mu-n+1)(\mu-n+2) \cdots \mu(\mu+1) \cdots (\mu+n)}{(n!)^2} \left(\frac{1-z}{2} \right)^n$$

P_μ の実部、虚部をそれぞれ S_1 、 S_2 とおき、 $\dot{W}_{h1}$ を実関数で表すと、

$$\dot{W}_h = AS_1 + BS_2 \dots\dots\dots (14)$$

ここに A, B は未定係数.

式 (11) の解は, C を未定係数として式 (15) で表せる.

$$\dot{W}_{h2} = C \cos \varphi \dots\dots\dots (15)$$

式 (14), (15) より,

$$\dot{W}_h = \dot{W}_{h1} + \dot{W}_{h2} = AS_1 + BS_2 + C \cdot \cos \varphi \dots\dots (16)$$

式 (16) を式 (8) に代入して Φ_h を求める. この際 $\cos \varphi$ は一つの解を表すが, これは式 (4) の N_φ , N_θ から分かる様に無応力状態を示すのでここでは省略する. 結局, Φ_h は次式となる.

$$\Phi_h = \frac{1}{9\lambda^2} \left\{ A(S_1 - \sqrt{9\lambda^2 - 1} S_2) + B(\sqrt{9\lambda^2 - 1} S_1 + S_2) \right\} \dots\dots\dots (17)$$

b. 特解: $\Phi_P, \dot{W}_P$

特解は直交関数列で展開できるものとし, その関数列を斉次境界条件式 (18) を満足する固有値方程式 (19) の解で与える.

$$\varphi = \varphi_0 \text{ において, } a f_n - b f_n = 0, a, b \text{ は定数} \dots (18)$$

$$H_0(f_n) + s_n f_n = 0, s_n = \nu_n(\nu_n + 1) \dots\dots\dots (19)$$

式 (18), (19) の解は実数次の第一種 Legendre 関数で次の直交条件式が成立する.

$$\int_0^{\varphi_0} \sin \varphi \cdot f_m f_n d\varphi = \beta_n \cdot \delta_{mn} \dots\dots\dots (20)$$

ここに δ_{mn} はクロネッカー・デルタである.

以上より $\Phi_P, \dot{W}_P$ を, 未定係数 a_n, b_n を用いて式 (21) で表す.

$$\Phi_P = \sum a_n f_n, \dot{W}_P = \sum b_n f_n \dots\dots\dots (21)$$

さらに, $\Phi, \dot{W}$ は余解と特解の和であるから,

$$\Phi = \Phi_h + \Phi_P \dots\dots\dots (22)$$

$$\dot{W} = \dot{W}_h + \dot{W}_P \dots\dots\dots (23)$$

c. 非線形項における $W', \dot{W}'$ の修正

基礎方程式 (2), (3) の右辺非線形項 (式中——部分) における $W', \dot{W}'$ は式 (23) で表された $\dot{W}$ から求めることができる. しかし, § 3 の 1 で後述するように, 式 (23) を用いて得られた線形解は Meier 式による線形厳密解⁽¹⁾と比較し, 変位に関して約 5% の誤差が認められた.

そこで, 本解析では線形解が厳密解とほぼ一致する次の方法によって $\dot{W}$ を導き, この $\dot{W}$ を用いて $W', \dot{W}'$ を求める.

まず歪—変位式に於いて非線形項を省略し, 式 (24)

を得る.

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}\varphi - \dot{\epsilon}\theta &= -\frac{3}{2\lambda} (\Phi'' - \cot \varphi \cdot \Phi') \\ &= \frac{1}{a} (\dot{v}' - \dot{v} \cot \varphi) \dots\dots\dots (24) \end{aligned}$$

$\dot{v}$ ここに, $\dot{v}$ は経線方向変位速度を示す. 式 (24) はに関する一階微分方程式で, $\varphi = \varphi_0$ で $\dot{v} = 0$ の境界条件より,

$$\dot{v} = -\frac{3h}{2} \sin \varphi \left(\frac{d\Phi}{dx} \Big|_{x=\cos \varphi_0} - \frac{d\Phi}{dx} \right) \dots\dots\dots (25)$$

$$\text{ここに, } x = \cos \varphi, \frac{d\Phi}{dx} = -\frac{1}{\sin \varphi} \Phi'$$

$$\text{さらに, } \dot{w} = \dot{v} \cot \varphi - a \dot{\epsilon}\theta \dots\dots\dots (26)$$

式 (4), (25), (26) より,

$$\begin{aligned} \dot{W} &= -(\Phi'' + \cot \varphi \cdot \Phi' + \frac{1}{2} \Phi) + \frac{1}{18\lambda^2} H_2(\dot{W}) \\ &\quad - \frac{1}{2} \eta q \lambda^2 \gamma(\varphi) + D \cos \varphi \dots\dots\dots (27) \end{aligned}$$

ここに D は未定係数,

式 (22), (23) を式 (27) の右辺に代入すると,

$$\begin{aligned} \dot{W} &= AS_1 + BS_2 + D \cos \varphi - \sum \left(\frac{1}{2} - s_n \right) a_n \cdot f_n \\ &\quad - \frac{1}{18\lambda^2} \sum (s_n - 2) b_n f_n - \frac{1}{2} q \eta \lambda^2 \gamma(\varphi) \dots (27) \end{aligned}$$

d. 固定境界条件式の代数方程式表示

周辺固定条件は $\varphi = \varphi_0$ において,

$$\dot{\epsilon}\theta = 0, \dot{W}' = 0, \dot{W} = 0 \dots\dots\dots (28)$$

$\dot{\epsilon}\theta = 0$ は式 (4), (22), (27) より次式 (29・a) となる.

$$\begin{aligned} &\sum \left\{ \frac{3}{2} \cos \varphi_0 \cdot \tilde{g}_n + \left(\frac{1}{2} - s_n \right) \tilde{f}_n \right\} \cdot a_n \\ &+ \frac{1}{18\lambda^2} \sum (s_n - 2) \tilde{f}_n \cdot b_n - \left\{ \tilde{S}_1 + \frac{1}{18\lambda^2} (\tilde{u}_1 \right. \\ &\quad \left. - \sqrt{9\lambda^2 - 1} \tilde{u}_2) \right\} A - \left\{ \tilde{S}_2 + \frac{1}{18\lambda^2} (\sqrt{9\lambda^2 - 1} \tilde{u}_1 \right. \\ &\quad \left. + \tilde{u}_2) \right\} B + \frac{1}{2} \eta q \lambda^2 \cdot \gamma(\varphi_0) = 0 \dots\dots\dots (29 \cdot a) \end{aligned}$$

$\dot{W} = 0$ は式 (27) を用いて

$$\begin{aligned} &-\sum \left(\frac{1}{2} - s_n \right) \tilde{f}_n a_n - \frac{1}{18\lambda^2} \sum (s_n - 2) \tilde{f}_n b_n + \tilde{S}_1 A \\ &+ \tilde{S}_2 B + D \cdot \cos \varphi_0 - \frac{1}{2} \eta q \lambda^2 \cdot \gamma(\varphi_0) = 0 \dots (29 \cdot b) \end{aligned}$$

$\dot{W} = 0$ 且つ $\dot{W}' = 0$ は式 (29・c) となる.

$$\begin{aligned} &\sum \left(\frac{1}{2} - s_n \right) (\cos \varphi_0 \cdot \tilde{g}_n - \tilde{f}_n) \cdot a_n + \frac{1}{18\lambda^2} \sum (s_n \\ &- 2) (\cos \varphi_0 \cdot \tilde{g}_n - \tilde{f}_n) b_n + (\tilde{S}_1 + \tilde{u}_1) A \end{aligned}$$

$$+ (\tilde{S}_2 + \tilde{u}_2) B - \frac{1}{2} \eta q \cdot \lambda^2 r(\varphi_0) = 0 \dots\dots\dots (29 \cdot c)$$

式 (29) において, $u_1 = -\cos \varphi \cdot \frac{dS_1}{d(\cos \varphi)}$, $u_2 = -\cos \varphi \cdot \frac{dS_2}{d(\cos \varphi)}$, $g_n = \frac{df_n}{d(\cos \varphi)}$, ($\sim$) は $\varphi = \varphi_0$ における () の値を示す。

e. 基礎方程式の直交条件式

式 (17), (21), (22), (16), (27) を基礎方程式 (2), (3) に代入し, 両辺に $\sin \varphi \cdot f_k$ を乗じ, 区間 $[0, \varphi_0]$ にて積分し, 適合条件式 (2), 釣合式 (3) に関する直交条件式を得る。即ち, 適合条件式 (2) の左辺は直交条件式 (20) を用いて,

$$\int_0^{\varphi_0} \{H_2 H_0(\varphi) + H_2(\dot{W})\} \sin \varphi \cdot f_k \cdot d\varphi \\ = s_k(s_k - 2) \cdot \beta_k \cdot a_k + (2 - s_k) \beta_k \cdot b_k \dots\dots\dots (30 \cdot a)$$

適合条件式 (2) の右辺は,

$$\int_0^{\varphi_0} \frac{1}{\lambda} \{2W' \dot{W}' - \cot \varphi (W' \dot{W}')\} \sin \varphi f_k \cdot d\varphi \\ = \frac{1}{\lambda} \int_{\cos \varphi_0}^1 \{2(1-x^2)W^0 \dot{W}^0 + x \{ (1-x^2)W^0 \dot{W}^0 \}^0\} f_k \cdot dx = \frac{1}{\lambda} \left\{ \int_{\cos \varphi_0}^1 (1-x^2)W^0 \dot{W}^0 (f_k - x f_k^0) dx - x_0 (1-x_0^2) W_0^0 \dot{W}_0^0 f_{k0} \right\} \dots\dots\dots (30 \cdot b)$$

ここに, $x = \cos \varphi$, $x_0 = \cos \varphi_0$, ($\quad$) $^0 = \frac{d(\quad)}{dx}$,

($\quad$) $_0 = (\quad) \Big|_{x=\cos \varphi_0}$ 法線方向釣合式 (3)

の左辺は式 (20) を用いて,

$$\int_0^{\varphi_0} \{H_2 H_2(\dot{W}) - 9 \lambda^2 H_2(\varphi)\} \sin \varphi f_k \cdot d\varphi \\ = 9 \lambda^2 (s_k - 2) \cdot \beta_k \cdot a_k + (s_k - 2) \cdot \beta_k \cdot b_k \dots\dots\dots (31 \cdot a)$$

同じく右辺は,

$$27 \lambda^4 \eta q \cdot \left(\int_{x_i}^1 x \cdot f_k \cdot dx + \frac{2}{3} x_i \int_{x_0}^{x_i} f_k \cdot dx \right) \\ + 9 \lambda \left\{ - \int_{x_0}^1 (1-x^2) W^0 \bar{N} \varphi f_k^0 dx \right. \\ \left. - (1-x_0^2) W_0^0 \bar{N}_{\varphi_0} f_{k0} \right\} \dots\dots\dots (31 \cdot b)$$

但し, $\bar{N} \varphi = \frac{a \eta}{h^2} N \varphi$

尚, 式 (30), (31) の積分計算はその解析的表示が不可能である為, Legendre-Gauß の数値積分法を適用して行われる。

f. 数値計算法

$t = 0$ において $W = 0$ の初期条件を考慮すると, 固定境界条件式 (29), 直交条件式 (30), (31) は

$$\int_0^t A dt, \int_0^t B dt, \int_0^t D dt, \int_0^t a_n dt, \int_0^t b_n dt \quad \text{に関する}$$

一階の連立非線形常微分方程式となる。ここでは, Runge-Kutta-Gill 法を適用し, この常微分方程式の解を求めている。

§ 3 数値解析例

1 線形解の検討

齊次境界条件式 (18) において $a = 1$, $b = 0$ の場合の特解に関する直交関数列を 7 項迄表したものが図-2 である。この関数列を用いて法線方向釣合式 (3) の荷重関数 $\xi(\varphi)$ を $\varphi_1 = 22.5^\circ$, $\varphi_0 = 45^\circ$ の場合について近似したものを図-3 に示す。これより 5 項以上で良好な近似を与えていることが分る。図-4 は

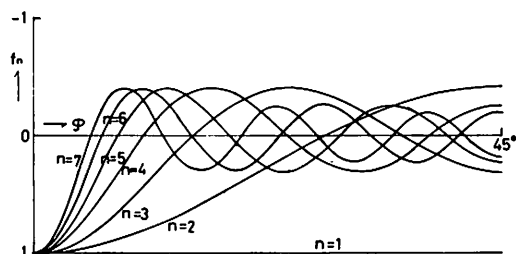


図-2 特解固有関数列 ($f_n' = 0$, $\varphi_0 = 45^\circ$)

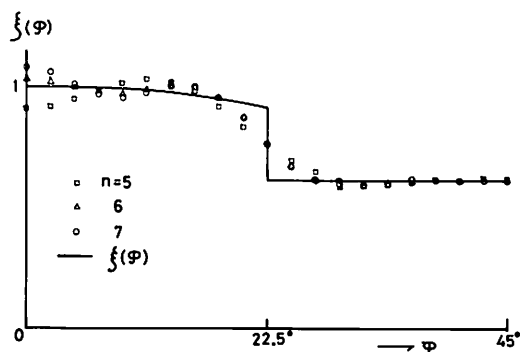


図-3 $\xi(\varphi)$ の近似

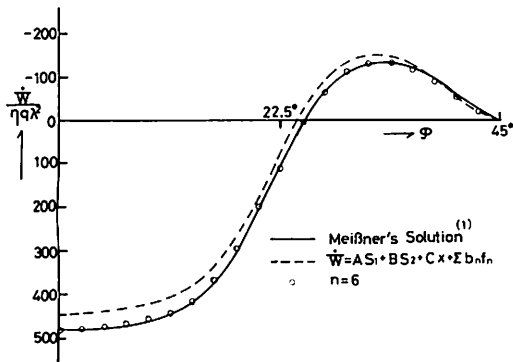


図-4 線形解の検討 ($\lambda=70$, $\varphi_1=22.5^\circ$, $\varphi_0=45^\circ$)

Meißner 式に基づく法線方向変位速度 $\dot{W}$ 厳密解との比較を $\lambda=70$, $\varphi_1=22.5^\circ$, $\varphi_0=45^\circ$ の場合について示したものである。図中実線は厳密解を、破線は $\dot{W}$ を式 (16), (24), (23) で与え且つ特解項数 n を 6 項迄採用した場合を示し、両者の間に違いが見られる。一方、図中・印は $\dot{W}$ を式 (27) で与え且つ項数を 6 項迄採用した場合の解を示し、厳密解とほぼ一致しているのがわかる。

2 非線形解の検討

一階多元連立常微分方程式 (29), (30), (31) を Runge-Kutta-Gill 法によって数値計算する場合、計算キザミ時間 Δt (もしくは $\Delta \alpha$) と特解項数 n が計算精度に影響を及ぼす。ここでは、 Δt に対して精度が充分得られていることを確かめた上で、 n による解の収束状況を示す。図-5 a は $\lambda=50$, $\varphi_1=22.5^\circ$, $\varphi_0=45^\circ$ の場合で、縦軸は無次元中央点変位 W_c を、横軸は無次元量 $\frac{\alpha}{\alpha_{cro}}$ を示す。ここに α_{cro} は古典無次元クリープ座屈値で、式 (32) で与えられる。

$$\alpha_{cro} = \frac{4}{3\lambda^2} \dots\dots\dots (32) \text{註}$$

図-5 a より n が 5 項以上で、ほぼ収束していることが分る。図-5 b は $\lambda=70$, $\varphi_1=22.5^\circ$, $\varphi_0=45^\circ$ の場合を示す。ここに W は 2 点即ちシェル変位がほぼ最大となる点 ($\varphi=13.5^\circ$) と中央点 ($\varphi=0^\circ$) について書かれている。これより $W_{13.5^\circ}$ は $\frac{\alpha}{\alpha_{cro}} < 1.7$ の範囲でほぼ収束しているのに対し、 W_c は $\frac{\alpha}{\alpha_{cro}} > 1.35$ で n による差異が見られる。 $n=8$ の場合、 $\frac{\alpha}{\alpha_{cro}} \approx$

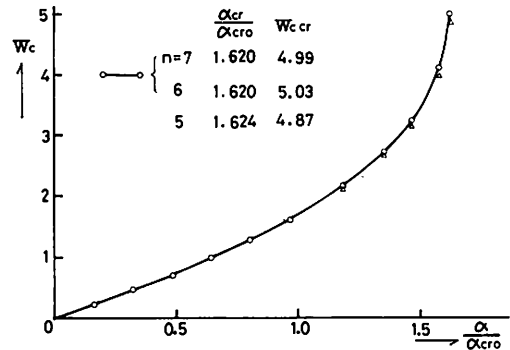


図-5 a 非線形解の検討 ($\lambda=50$, $\varphi_1=22.5^\circ$, $\varphi_0=45^\circ$)

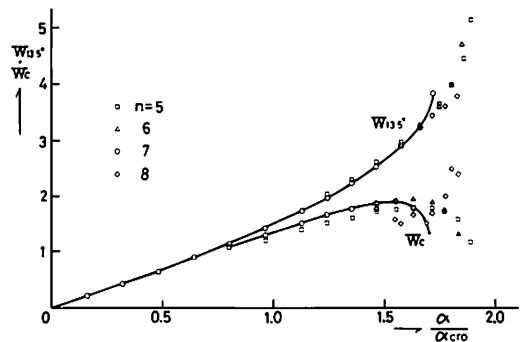


図-5 b 非線形解の検討 ($\lambda=70$, $\varphi_1=22.5^\circ$, $\varphi_0=45^\circ$)

1.56 でシェル中央点近傍の変位速度 $\dot{W}_c$ が急増し局部的座屈現象が見られるが、その後再び構造は安定し、最終的には $\dot{W}_c$ 及び $\dot{W}_{13.5^\circ}$ がほぼ同時に $|0|$ に漸近し座屈する。以上の例で示された様に入が大きな場合、高次変位波形が生じ易く、その解の収束性が問題となるばかりでなく、局部的座屈を供うクリープ座屈判定方法にも検討の余地が残された。

3 非線形解析結果

特解採用項数を 7 項採用し、 $\lambda=30 \sim 100 @ 10$, $\varphi_0=45^\circ$, $\varphi_1=22.5^\circ$ について行った数値計算の結果を図-6, 表-1 に示す。これらよりシェル中央点の変位速度ベクトルは $\lambda \leq 50$ の場合下向き、 $\lambda \geq 60$ の場合上向きとなること即ち λ が 50 から 60 の範囲で変位モードの波数変化が見られること、 $\frac{\alpha_{cr}}{\alpha_{cro}}$ は λ によらず 1 以上であることがわかった。前述した様に、 $\lambda \geq 60$ の場合、クリープ座屈点近傍の計算精度及び座屈点の検討の余地があるものの、定性的には信頼できる結果を

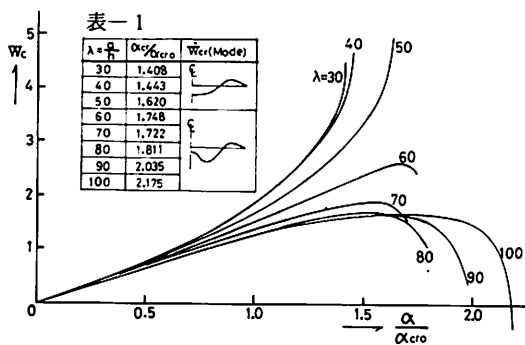


図-6 非線形解析結果 ($\phi_i = 22.5^\circ$, $\phi_o = 45^\circ$, $n = 7$)

与えていると思われる。

§ 4 結び

集中的等分布荷重を受ける周辺固定 Ice Domes の軸対称クリープ座屈解析法を展開し、若干の数値解析例を示した。まず①当氷材の構成式を線形 Maxwell Model で仮定且つ不変量理論、② Sanders Shell Theory の一部簡略化に基づき基礎式を誘導した。得られた基礎式は線形弾性体材料における基礎式と異なっていることを、即ち本問題では弾性アナロジーが成立しないことを確認し、さらに本理論の枠内では無次元クリープ座屈値 α_{cr} は曲率半径/板厚： λ によって定められることを示した。数値解析は、①非線形方程式を線形方程式の如く扱い、解を余解と特解の和で与え、②特解固有関数列に関する基礎式の直交条件と境界条件式から、結局本問題は一階連立微分方程式を解く問題に帰着され、これを Runge-Kutta-Gill 法によって解を求める、の手順によってした。

以上の方法に基づき $\phi_o = 45^\circ$, $\phi_i = 22.5^\circ$ の場合について計算を実行し、線形及び非線形解の精度を検討するとともに $\lambda = 30 \sim 100$ の範囲で非線形解析結果を示した。

尚、本解析で得られた軸対称無次元クリープ座屈値は即往実験値を大きく上回っていることが最近筆者らの行った実験結果^{(3),(4)}で明らかにされつつある。この相違の原因として、実験では①崩壊前近傍において非軸対称変形モードの急増がみられること、②形状、荷重不整の不可避、本理論で用いた③雪氷材構成式の精度、等々が考えられる。弾性部分球殻の座屈問題と

同様、Ice Domes のクリープ座屈問題に於いても、理論値と実験値がそう簡単に一致するとは思われない。そこで、今回の軸対称クリープ座屈解析に引き続き、実験結果を考慮し、理論的解明の第二段として、今後は非軸対称クリープ座屈解析を進める予定である。

註) 一様外圧を受ける弾性完全球殻の座屈荷重は式 (1-A) で与えられる。

$$q_{cr} = \frac{2E}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \dots\dots\dots (1-A)$$

式中、 q_{cr} は座屈荷重、 E はヤング係数、 ν はポアソン比を示す。本解析では材料が線形 Maxwell Model 且つ不変量理論に従うとしているから、式 (1-A) において、 $E = \frac{1}{\eta t}$, $\nu = 0.5$ を代入し、

さらに式を変形すると $(\eta t q_{cr}) = \frac{4}{3\lambda^2}$ が得られる。

ところで $\eta t q$ は § 2 で述べた様に α を表し、結局 α_{cro} は式 (1-B) で与えられる。

$$(\eta t q_{cr}) = \alpha_{cro} = \frac{4}{3\lambda^2} \dots\dots\dots (1-B)$$

謝辞

本数値解析プログラムの開発は昭和57年度東海大学総合研究所機構国内研修D項の援助を受け、昭和57年8月に東海大学大型計算機センターで行なわれた。ここに関係各位の皆様には厚く御礼申し上げます。

参考文献

- (1) 粉川、平沢：「Ice Shell Structures の研究、第1報 短時間加力による Ice Domes の力学的性状」、北海道東海大学紀要 Vol. 3, 4., pp. 77-85., 1982・1983
- (2) 粉川：「アイスシェルによる空間構造の試み」、北海道のどぼく、第118号、pp. 20-21., 4, 1983
- (3) 平沢、粉川：「Ice Shell Structures の研究、第2報 スパン 2m 雪氷ドームのクリープ崩壊実験」、北海道東海大学紀要 Vol. 5, pp. 7-15., 1984
- (4) 粉川：「アイスドームのクリープ崩壊実験」、第33回応用力学連合講演会、1983., 12.
- (5) 例えば、J. C. Gerdeen and V. K. Saga-

- wal : 「A Review of Creep Instability in High-Temperature Piping and Pressure Vessels」, 1974, WRC Bulletin, 195, pp. 33 - 56.
- (6) Leslie Hajdo : 「The Time-Dependent . Deformation of Ice Domes」, Int. J. Solids Structures, Vol.15, pp.261 - 267, 1979
- (7) F. K. G. オドクヴィスト, J. ハルト共著 (村上澄男訳) 「クリープ強さの理論」, 培風館, 1967
- (8) M. Mellor et al. 「Mechanical Properties of Polycrystalline Ice : An Assesment of Current Knowledge and Priorities for Research」: Cold Regions Scince and Technology, 3 (1980) .263-275
- (9) N. H. Sinha : 「Short-Term Reology of Polycrystalline Ice」; J. of. Glaciology, Vol. 21, No. 85, 1978
- (10) Sanders, J. L., Jr., 「Nonlinear Theories for Thin Shells」, Quarterly of Applied Mathematics, Vol. 21, 1963, pp. 21-36
- (11) 坪井善勝 : 「連続体力学序説」, 産業図書 (1977) pp. 313-315.
- (12) 国枝治郎他 : 「非偏平球殻の逆対称形応答振動特性」, 第25回構造工学シンポジウム, 1979.2. pp. 93-104.
- (13) Odqvist, F. K. G., 「Applicability of the elastic analogue in creep problems for plates, membranes and beams」, IUTAM Colloquium on creep in structures, Stanford 1960b ; Springer, Berlin (1962), 137 - 160
- (14) T. Kokawa : 「General Buckling of Cylindrical Reticulated Shell Roofs」, Proc. of Japan Congress for Applied Mech., Vol. 28, 1980
- (15) 森口, 宇田川, 一松, 「数学公式Ⅲ一特殊函数一」 岩波書店, 1971