

アイスドームの形状・クリープ変形解析

2 構造-6 シェル・空間構造

正会員 粉川 牧^{*1}

アイスドーム 形状解析 クリープ変形解析

膜理論 グレンの法則 不変量理論

1. はじめに

氷を構造材料とする薄肉の曲面板構造体‘アイスシェル’が厳寒多雪地域の北海道内陸部において冬のテンポラリーストラクチャーとして活用されている¹⁾。建設されるシェルはその多くが軸対称形ドームで底面直径が 15m 以下のものに限られている。一方で、実験的には 30m 級までのアイスドームが試作され^{2), 3)}、その空間規模の拡大化が図られようとしている。巨大アイスドームの実施適用において、クリープに対する構造挙動の理解が極めて重要である。アイスシェルはその境界が剛支持されるため自重型荷重下において膜応力状態にあり力学的合理性が高く、その作用応力は 40m 級のアイスドームの場合であっても氷の短期圧縮強度の 1/40~1/50 と小さく、強度的に十分な安全性を有している。しかし、氷は極めてクリープし易い材料で⁴⁾、時間の経過とともに増大するクリープ変形は建築空間としての使用を制限しさらには崩壊の引き金になることが考えられ⁵⁾、特に巨大アイスドームではクリープ変形量をなるべく少なくすることが耐久性の向上に寄与するものと思われる。そこで、今まで用いられてきた球形曲面・一様厚の場合に比べてクリープ変形を少なくして膜応力を小さくする非球形アイスドームの曲面形状と氷厚分布を解析的に求める方法を開発した。即ち、自重下において、経線方向と緯線方向の膜応力分布が指定された軸対称アイスドームの曲面形状と氷厚分布をシェルの膜理論⁶⁾に基づいて数値的に求める方法を示し、さらに、氷材料の歪速度と一軸応力の関係式が Glen の法則⁷⁾に従うと仮定して、そのアイスドームのクリープ変形量を不変量理論⁸⁾とシェルの膜理論に基づいて求める解析方法を展開した。

2. 形状解析

自重下における緯線方向、経線方向の膜応力を指定した時の軸対称シェルの曲面形状を以下のようにして求める。軸対称曲面の法線方向の力の釣り合い式は、図 1 を参照

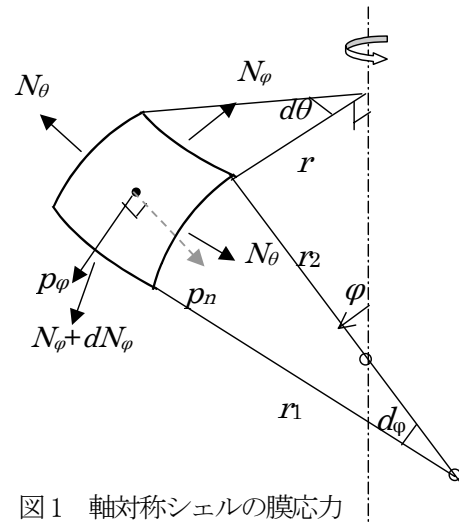


図1 軸対称シェルの膜応力

して、式 (1) で与えられる⁹⁾。

$$\frac{N_{\phi}}{r_1} + \frac{N_{\theta}}{r_2} = -p_n \quad (1)$$

ここに、 N_{ϕ} , N_{θ} はそれぞれ経線方向、緯線方向の単位幅あたりの応力を表し、式 (2) で与える。

$$N_{\phi} = -\sigma_0 h f_{\phi}(\varphi), \quad N_{\theta} = -\sigma_0 h f_{\theta}(\varphi) \quad (2)$$

ここに、 $-\sigma_0$ はドーム頂点における単位断面積に生ずる圧縮膜応力、 f_{ϕ} , f_{θ} は応力分布、 h は板厚をそれぞれ表し、 φ の関数で与えられる。ここで、 $\varphi=0$ のとき、 $f_{\phi}(0) = f_{\theta}(0) = 1$ とする。自重下において、 $p_n = \rho h \cos \varphi$ と表わされ、これと式 (2) を式 (1) に代入すると、

$$\sigma_0 h \left(\frac{f_{\phi}}{r_1} + \frac{f_{\theta}}{r_2} \right) = \rho h \cos \varphi \quad (3)$$

ここに、 ρ は材料密度を表す。式 (3) は

$$r = r_2 \sin \varphi, \quad r_1 d\varphi = \frac{dr}{\cos \varphi}, \quad \frac{\rho}{\sigma_0} = \alpha, \quad \alpha r = \beta \quad \text{とすると、}$$

$$\frac{d\beta}{d\varphi} = \frac{\beta f_{\phi} \cos \varphi}{\beta \cos \varphi - f_{\theta} \sin \varphi} \quad (4)$$

β は式 (4) において初期条件 $\varphi \rightarrow 0, \frac{d\beta}{d\varphi} = 2$ のもと

に Runge-Kutta 法 を用いて数値的に求まる。曲面形

状を x, z 座標値で表わすと (図 2 参照), それぞれ

$$\alpha z = \lim_{\varphi \rightarrow 0} \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{\beta f_{\varphi} \sin \varphi}{\beta \cos \varphi - f_{\theta} \sin \varphi} d\varphi \quad (5)$$

$$\alpha x = \lim_{\varphi \rightarrow 0} \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{\beta f_{\varphi} \cos \varphi}{\beta \cos \varphi - f_{\theta} \sin \varphi} d\varphi = \beta_{\varphi} \quad (6)$$

従って, αz は β を既知として, 式 (5) を数値積分して,

αx は式 (6) より β_{φ} で求められる.

次に氷厚 h を求める. 経線方向の力の釣り合い式は式 (7) で与えられる.

$$\frac{d(N_{\varphi} r)}{d\varphi} - N_{\theta} r_1 \cos \varphi + p_{\varphi} r_1 r = 0 \quad (7)$$

式 (7) に $N_{\varphi} = -\sigma_{\varphi} h f_{\varphi}$, $N_{\theta} = -\sigma_{\theta} h f_{\theta}$ と $p_{\varphi} = \rho h \sin \varphi$ を代入して, 式 (8) を得る.

$$\frac{1}{Q} \frac{dQ}{d\varphi} = \frac{(f_{\theta} - f_{\varphi}) \cos \varphi + \beta \sin \varphi}{\beta \cos \varphi - f_{\theta} \sin \varphi} \quad (8) \quad \text{ここに } Q = h f_{\varphi}$$

式 (8) を $\varphi = \varphi_0 \rightarrow 0$ に対して $Q = Q_0 (= h_0)$ の条件で解くと h は式 (9) となる.

$$\therefore \left(\frac{h}{h_0} \right) = \left(\frac{1}{f_{\varphi}} \right) \exp \left(\lim_{\varphi_0 \rightarrow 0} \int_{\varphi_0}^{\varphi} \left(\frac{\beta \sin \varphi + (f_{\theta} - f_{\varphi}) \cos \varphi}{\beta \cos \varphi - f_{\theta} \sin \varphi} \right) d\varphi \right) \quad (9)$$

ここで, h_0 はドーム頂点のシェル厚を示す.

3. クリープ変形解析

氷の一軸応力下における歪速度 ($\dot{\varepsilon}$) - 応力 (σ) 関係を Glen's law⁷⁾ で表わす.

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \dot{\varepsilon} = k \sigma^n \quad (10) \quad \text{ここに } k, n \text{ は定数.}$$

シェルの歪と変位は式 (11) で表わされる.

$$\varepsilon_{\theta} = \frac{v \cos \varphi - w \sin \varphi}{r} = \frac{v \cot \varphi - w}{r_2} \quad (11)$$

$$\varepsilon_{\varphi} = \frac{v' - w}{r_1}$$

ここに図 2 を参照して, $r = \frac{d}{d\varphi}$, w, v は法線方向,

経線方向変位を, $\varepsilon_{\theta}, \varepsilon_{\varphi}$ は緯線, 経線方向歪度を表わしている. 一方, 歪速度-応力関係式は, 不変量理論⁸⁾ を適用して, 式 (12) 表わされる.

$$\dot{\varepsilon}_{\varphi} = k \left(\sigma_{\varphi} - \frac{1}{2} \sigma_{\theta} \right) \left(\sigma_{\varphi}^2 - \sigma_{\varphi} \sigma_{\theta} + \sigma_{\theta}^2 \right)^{\frac{n-1}{2}}$$

$$= -k \sigma_{\theta}^n \left(f_{\varphi} - \frac{1}{2} f_{\theta} \right) \left(f_{\varphi}^2 - f_{\varphi} f_{\theta} + f_{\theta}^2 \right)^{\frac{n-1}{2}}$$

$$\dot{\varepsilon}_{\theta} = -k \sigma_{\theta}^n \left(f_{\theta} - \frac{1}{2} f_{\varphi} \right) \left(f_{\varphi}^2 - f_{\varphi} f_{\theta} + f_{\theta}^2 \right)^{\frac{n-1}{2}} \quad (12)$$

$$\text{ここに } \sigma_{\varphi} = \frac{N_{\varphi}}{h} = -\sigma_{\theta} f_{\varphi}, \quad \sigma_{\theta} = \frac{N_{\theta}}{h} = -\sigma_{\theta} f_{\theta}$$

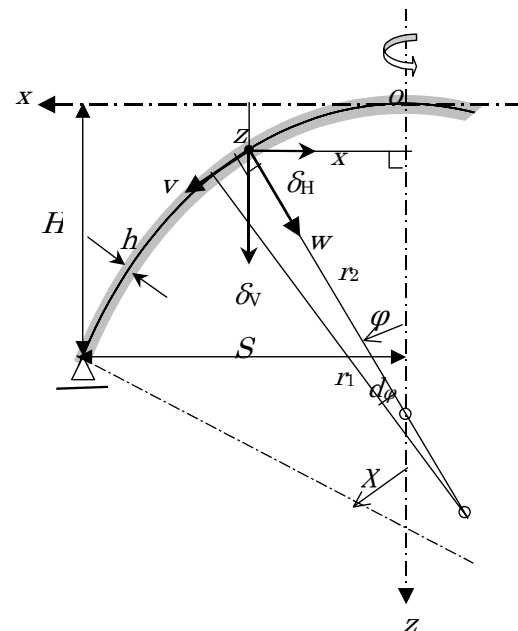


図 2 軸対称シェルの形状と変位

式 (11) の w を消去し, 式 (12) を用いて, \dot{v} の 1 階常微分式 (方程式 (13)) を得る.

$$\dot{v}' - \dot{v} \cot \varphi = F(\varphi)$$

$$\text{ここに } F(\varphi) = r_1 \dot{\varepsilon}_{\varphi} - r_2 \dot{\varepsilon}_{\theta}$$

$$= k \sigma_{\theta}^n r \left(f_{\varphi}^2 - f_{\varphi} f_{\theta} + f_{\theta}^2 \right)^{\frac{n-1}{2}} \left\{ -\frac{f_{\varphi} \left(f_{\varphi} - \frac{1}{2} f_{\theta} \right)}{\beta \cos \varphi - f_{\theta} \sin \varphi} + \frac{\left(f_{\theta} - \frac{1}{2} f_{\varphi} \right)}{\sin \varphi} \right\}$$

.....(13)

$$\text{式 (13) の一般解は } \dot{v} = \sin \varphi \left\{ \int_0^{\varphi} \frac{F(\varphi)}{\sin \varphi} d\varphi + C \right\} \quad (14)$$

ここで, 未定係数 C は支持条件によって決定される. 式 (14) における \dot{v} を用いると, \dot{w} は式 (15) となる.

$$\dot{w} = \dot{v} \cot \varphi - r_2 \dot{\varepsilon}_{\theta} = \cos \varphi \left\{ \int_0^{\varphi} \frac{F(\varphi)}{\sin \varphi} d\varphi + C \right\} \quad (15)$$

$$+ r_2 k \sigma_{\theta}^n \left(f_{\theta} - \frac{1}{2} f_{\varphi} \right) \left(f_{\varphi}^2 - f_{\varphi} f_{\theta} + f_{\theta}^2 \right)^{\frac{n-1}{2}}$$

図 2 に示される鉛直変位速度 $\dot{\delta}_v$ は式 (16) で与えられる.

$$\dot{\delta}_v = \dot{v} \sin \varphi + \dot{w} \cos \varphi \quad (16)$$

支持点 $\varphi = \chi$ において鉛直変位速度 $\dot{\delta}_v = 0$ として未定係数 C を決める.

$$\therefore C = -\int_0^{\chi} \frac{F(\varphi)}{\sin \varphi} d\varphi - \bar{r}_2 k \sigma_o^n \left(\bar{f}_\theta - \frac{1}{2} \bar{f}_\varphi \right) \left(\bar{f}_\varphi^2 - \bar{f}_\varphi \bar{f}_\theta + \bar{f}_\theta^2 \right)^{\frac{n-1}{2}} \cos \chi$$

.....(17)

ここに $\bar{\nabla}$ は $\varphi = \chi$ のときの ∇ の値.

さらに, $\beta = \alpha r$, $\alpha = \frac{\rho}{\sigma_o}$ と

$$E(\varphi) = \frac{\alpha F(\varphi)}{k \sigma_o^n \sin \varphi}$$

$$= \beta \left(f_\varphi^2 - f_\varphi f_\theta + f_\theta^2 \right)^{\frac{n-1}{2}} \left\{ -\frac{f_\varphi \left(f_\varphi - \frac{1}{2} f_\theta \right)}{\sin \varphi (\beta \cos \varphi - f_\theta \sin \varphi)} + \frac{\left(f_\theta - \frac{1}{2} f_\varphi \right)}{\sin^2 \varphi} \right\}$$

を用いると, $\dot{\delta}_v$ と水平変位速度 $\dot{\delta}_H = -\dot{v} \cos \varphi + \dot{w} \sin \varphi$

は式 (18) で与えられる.

$$\therefore \alpha \dot{\delta}_H = k \sigma_o^n \beta \left(f_\theta - \frac{1}{2} f_\varphi \right) \left(f_\varphi^2 - f_\varphi f_\theta + f_\theta^2 \right)^{\frac{n-1}{2}}$$

$$\therefore \alpha \dot{\delta}_v = k \sigma_o^n \left\{ \begin{aligned} & \left[\frac{\beta}{\sin \varphi} \left(f_\theta - \frac{1}{2} f_\varphi \right) \left(f_\varphi^2 - f_\varphi f_\theta + f_\theta^2 \right)^{\frac{n-1}{2}} \cos \varphi \right. \\ & \left. - \frac{\bar{\beta}}{\sin \chi} \left(\bar{f}_\theta - \frac{1}{2} \bar{f}_\varphi \right) \left(\bar{f}_\varphi^2 - \bar{f}_\varphi \bar{f}_\theta + \bar{f}_\theta^2 \right)^{\frac{n-1}{2}} \cos \chi \right] \\ & \left. - \int_\varphi^\chi E(\varphi) d\varphi \right\} \end{aligned} \right.$$

.....(18)

式 (18) より頂点変位速度 $\dot{\delta}_{vtop}$ は

$$\therefore \alpha \dot{\delta}_{vtop} = k \sigma_o^n \left\{ \begin{aligned} & 1 - \bar{\beta} \left(\bar{f}_\theta - \frac{1}{2} \bar{f}_\varphi \right) \left(\bar{f}_\varphi^2 - \bar{f}_\varphi \bar{f}_\theta + \bar{f}_\theta^2 \right)^{\frac{n-1}{2}} \frac{\cos \chi}{\sin \chi} \\ & - \int_0^\chi E(\varphi) d\varphi \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

ドーム全体の平均鉛直変位速度 $\dot{\delta}_{vav}$ は

$$\dot{\delta}_{vav} = \frac{\int_0^\chi \dot{\delta}_v (2\pi r r_1 d\varphi)}{\int_0^\chi 2\pi r r_1 d\varphi} = \frac{\int_0^\chi \dot{\delta}_v r r_1 d\varphi}{\int_0^\chi r r_1 d\varphi} \quad (20)$$

4. 数値解析例

膜応力分布 f_φ, f_θ を式 (21) で与え, 本解析方法に基づいて数値計算を行うと, 解は理論解の半開角 63.435° の部分球面・一様厚と一致した. 以下にて, このドームを S ドームと名づける.

$$f_\varphi = \frac{2}{1 + \cos(x\chi)}, f_\theta = 2 \left(\cos(x\chi) - \frac{1}{1 + \cos(x\chi)} \right), \quad (21)$$

ここに $x = \frac{\varphi}{\chi}$, $\chi = 63.435^\circ$

S ドームと同一の中央点高さ／底面直径 (=0.309) を有する軸対称ドームの形状解析では f_φ, f_θ を式 (22) で与えて数値計算を実行した. その結果得られたドームを IP ドームと名づける.

支持境界 $\varphi = \chi$ に対して $\varepsilon_\theta = 0 (f_\theta - \frac{1}{2} f_\varphi = 0)$ とする.

$$\chi = 55.502^\circ \text{ として, } x = \frac{\varphi}{\chi} \text{ とおく.}$$

$$f_\varphi = \begin{cases} 1, & 0 < x < x_o \\ 1 + \frac{k_f}{2} \left(1 + \sin \left(\frac{(x - 0.5(x_1 + x_o))\pi}{(x_1 - x_o)} \right) \right), & x_o < x < x_1 \\ 1 + k_f, & x_1 < x < 1 \end{cases}$$

$x_o = 0.2, x_1 = 0.9,$

$$\varsigma = \frac{1}{1 + \cos 63.435^\circ} = 0.69098,$$

$$k_f = 2\varsigma - 1 = 2 \times 0.69098 - 1 = 0.38196$$

$$k_t = \frac{(1 - k_f)}{2} = \frac{(1 - 0.38196)}{2} = 0.30902,$$

$$f_\theta = \begin{cases} 1, & 0 < x < x_o \\ 1 - \frac{k_t}{2} \left(1 + \sin \left(\frac{(x - 0.5(x_1 + x_o))\pi}{(x_1 - x_o)} \right) \right), & x_o < x < x_1 \\ 1 - k_f, & x_1 < x < 1 \end{cases}$$

.....(22)

式 (21), (22) を図示すると図 3 になる. これらの与えられた応力から解析して導かれた図 4, 5 は両ドームの曲面形状と氷厚分布の比較を示している. 表は両ドームの力学的性状の比較をクリープ指数 $n=1, 2, 3$ (式 (10) 参照) に対して示したもので, IP ドームは従来より用いられている S ドーム比べてクリープ変形を格段に少なくして膜応力を小さくすることが示された.

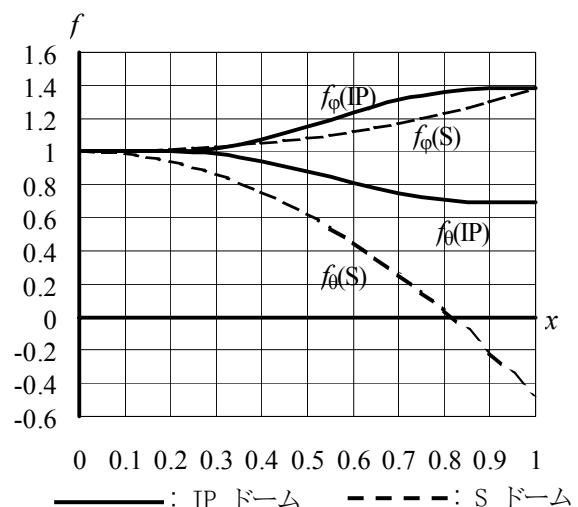


図3 膜応力分布の比較

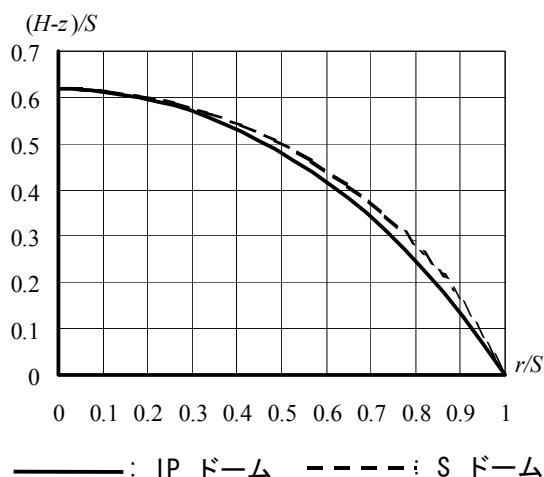


図4 ドーム曲面形状の比較

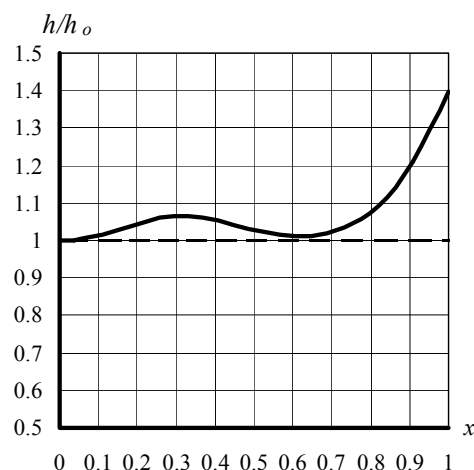


図5 ドーム氷厚分布の比較

表 変位速度と応力の比較

n (式(10))	$(\delta_{VIP}/\delta_{VS})_{average}$	$(\delta_{VIP}/\delta_{VS})_{apex}$	$(\sigma_{OIP}/\sigma_{OS})$
1	0.388	0.463	0.842
2	0.263	0.344	
3	0.172	0.244	

δ_{VIP} : IP ドームの鉛直変位速度, δ_{VS} : S ドームの鉛直変位速度

$(\delta_{VIP}/\delta_{VS})_{average}$: $(\delta_{VIP}$ の平均値) / $(\delta_{VS}$ の平均値), $(\delta_{VIP}/\delta_{VS})_{apex}$: ドーム頂点における δ_{VIP}/δ_{VS}

σ_{OIP} : IP ドーム頂点の応力, σ_{OS} : S ドーム頂点の応力

5. おわりに

数値解析例で示した IP ドームの形状は目下進行中の東海大学・学生プロジェクトのアイスパンテオンプロジェクトにおいて適用されている⁹⁾。このプロジェクトでは世界最大級のコンクリートドームとして知られるローマのパンテオンの規模に匹敵する 40m 級のアイスドーム建設の実現を目指している。この場合、計算上、頂点圧縮応力度 σ_{OIP} は自重下において 7.5 N/cm^2 となる。この値は氷の圧縮強度の約 $1/50 \sim 1/60$ に相当し、クリープ変形量は従来の球形ドームに比べて格段に少なくなる。既往の 20~30m 級球形アイスドームのフィールド実験結果と 100 を超えるアイスシェルの建設経験に加えて本検討結果はこの巨大アイスドームの実現に確信的根拠を与えるものと思われる。

参考文献

- 1) T. Kokawa. State of the Art Developments in Ice Shell Construction, 2005/08, CD-ROM (Proceedings of 17th Canadian Hydrotechnical Conference, 973-982.)
- 2) T. Kokawa, O. Itoh and T. Watanabe. Re-Challenge to 20-m Span Ice Dome, CD-ROM of IASS in Nagoya (Edited by Kunieda) 2001/10, TP187.

- 3) T. Kokawa. Field Study of a 30-m Span Ice-Dome, Journal of IASS Vol.43 (2002) n.2, August n.139, 93-100.
- 4) M. Mellor. Mechanical Properties of Polycrystalline Ice, Physics and Mechanics of Ice, IUTAM SYMPOSIUM COPENHAGEN 1979 (Editor Per Tryde), 217-245.
- 5) T. Kokawa. SIMPLIFIED FORMULA FOR STATIONARY CREEP DEFLECTION OF ICE DOME, 2009/07, CD-ROM (Proceedings of the 20th International Conference on Port and Ocean Engineering under Arctic Conditions, POAC09-24.PDF(10pp.))
- 6) Timoshenko, S. P. and Woinowsky-Krieger, S., 1959. Theory of Plates and Shells, McGraw-Hill, London, 2nd Ed., 436-447.
- 7) A. Assur. Some Promising Trends in Ice Mechanics, Physics and Mechanics of Ice, IUTAM SYMPOSIUM COPENHAGEN 1979 (Editor Per Tryde), 1-15.
- 8) Odqvist and Hult (村上澄男訳, 1967). クリープ強さの理論, 培風館, 309pp.
- 9) T. Suzuki, T. Kokawa and K. Watanabe. Ice Pantheon Project 2010, 2010/11, CD-ROM (Proc. of IASS Symposium in Shanghai, China, 2958-2970.)

*1 東海大学芸術工学部建築環境デザイン学科教授, 工博