

## 論文

# 円形等分布荷重を受けるアイスドームの構造安全性に関する検討

粉川 牧<sup>1)</sup>

## 要旨

アイスドーム上に人間が載る場合の構造安全性に関する数値的検討方法を示した。まず、構造体の氷は弾性的に振舞うと仮定して、載荷半径が小さい円形等分布荷重を受ける偏平球殻の力学問題として捉え、その理論解を求めた。そして、その円形等分布荷重がドーム上の1箇所（シングル荷重）と2箇所（ツイン荷重）に作用する場合について、それぞれ、ドーム下面に生ずる最大引張応力を算定する近似式を提示した。人間一人の重さが100 kg、氷の許容曲げ応力を3 kg/cm<sup>2</sup>程度とした場合、この近似式に基づいてアイスドームの最小氷厚を計算すると（但しツイン荷重の場合、荷重心間距離は1 m）、底面直径が15 m以下の場合は6 cm、15 mを超え30 mまでのアイスドームの場合は7 cm、となる結果を得た。

キーワード：アイスドーム、人間載荷、短期構造安全性、円形等分布荷重、最小氷厚

Key words: Ice Dome, Human live load, Short-term structural safety, Uniformly circular load, Minimum ice thickness

## 1. はじめに

寒さ厳しく雪が多い北海道の内陸部において、氷を材料とする薄肉の曲面板構造、アイスシェルが冬のテンポラリーな建築構造物として使用されている。とりわけ、その中の一つ、北海道有数のリゾート地占冠村トマムでは、1997年以来、毎冬12月下旬～翌年3月下旬の約3ヶ月間、底面直径15 m以下の中小規模アイスドームが冬期間限定のリクリエーション施設として利用されている(Kokawa *et al.*, 2000)。二重平面膜と網目状カバーロープからなる型枠空気膜に散雪散水して造るというその建設技法は施工合理性に優れるのみならず、シェルの力学的合理性にも裏付けられ、スパン20～30 m級の巨大アイスドームを正味1週間以内という驚異的短期間で建設施工し、且つ十分な耐久性を有していることが既往の実大フィールド実験(粉川ら, 2002; 粉川, 2002)で確かめられている。このように、北海道のフィールドを舞台として、冬の自然環境のなかで、実大規

模の適用化実験と実大モデルの建設施工実験及び構造クリープ実験が何度も繰り返し行われ、アイスシェル研究は進められて来た。その結果、今日では、アイスシェルは厳寒多雪地域における冬のアクティビティーに対応できる実用的な氷構造物であることが広く認知されようとしている。しかし、アイスシェルの研究蓄積は未だ不十分で、健全な氷建築構造物として実現に導くための設計・施工・維持安全管理に関わる構造工学的諸問題は依然として多く残されているのが現状である。とりわけ、アイスシェルの構造安全性に係わる力学的諸問題は未解明なことが多い。本研究はその中の一つ、短時間で集中的荷重を受けるアイスドームの構造安全性の検討方法を取り上げている。

建設施工過程におけるドーム上での散水作業や維持管理過程に於けるドーム上での除雪作業など、様々な状況下で、人間がアイスドーム上に載る場合がある。このような時、構造安全性を確保できるアイスドームの最小氷厚を定めておく必要がある。一般に集中的荷重を受けるシェルは加力

1) 北海道東海大学芸術工学部  
〒070-8601 旭川市神居町忠和224

点近傍で局所的な曲げモーメントを発生し、特に材料が氷のような脆性材料の場合、これが引き金となって致命的な曲げ破壊を惹起せしめることが予想され、この問題に対するアイスドームの構造的安全性を検討しておく必要がある。そこで、まず、本問題は短期加力問題であり、構造体の氷は弾性的に振舞うと仮定して、載荷半径の小さい円形等分布荷重を受ける弹性偏平球殻の力学問題として捉え、その理論解を求めた。そして、円形等分布荷重がドーム上の 1箇所と 2箇所に作用する場合について、それぞれ、ドーム下面に生ずる最大引張応力を算定する近似式を提示した。この最大引張応力が安全率を見込んだ氷の許容曲げ応力の大きさを超えないければ、安全であるという考え方を採用して構造的安全性の検討を試みた。

## 2. 円形等分布荷重を受ける場合の弹性解

### 2.1 鉛直変位解 $w$ と応力関数解 $F$

図 1 に示される円形等分布荷重を受ける偏平球殻の基礎方程式は式 (1) で与えられる (Timoshenko, S. P. and Woinoosky-Krieger, S., 1959b)。  
釣り合い方程式：

$$\left. \begin{aligned} \Delta\Delta w - \frac{1}{DR} \Delta F &= \frac{qG(r-a)}{D} \\ \text{適合条件式：} \\ \Delta\Delta F + \frac{Eh}{R} \Delta w &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

但し、

$$\Delta = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr}, \quad w : \text{鉛直変位}, \quad F : \text{応力関数},$$

$R$  : 曲率半径,

$q$  : 単位面積あたりの荷重の大きさ,

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} : \text{板剛性}, \quad h : \text{板厚},$$

$E$  : ヤング率,  $\nu$  : ポアソン比

$$G(r-a) = \begin{cases} 1, & 0 \leq r \leq a \\ 0, & r \geq a \end{cases}, \quad a : \text{載荷半径}$$

式 (1) の解  $w, F$  は無限遠点で諸物理量は零となることを考慮すると、各領域毎にそれぞれ式 (2), (3) で与えられる [付録参照]。

領域 I ( $x < a$ ) において、

$$\left. \begin{aligned} w &= \frac{RP_t}{Eh^2} \frac{\sqrt{12(1-\nu^2)}}{\pi} \left( \left( \frac{\ker' \alpha}{\alpha} \right) berx - \left( \frac{kei' \alpha}{\alpha} \right) beix + \frac{1}{\alpha^2} \right) \\ F &= \frac{RP_t}{\pi} \left\{ \left( -\frac{kei' \alpha}{\alpha} \right) berx - \left( \frac{\ker' \alpha}{\alpha} \right) beix - \frac{1}{2} \log \alpha + \frac{1}{4} \left( 1 - \left( \frac{x}{\alpha} \right)^2 \right) \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

ここに、 $P_t = \pi a^2 q$ ,  $P_t$  : 全荷重,  $x = \frac{r}{l}$ ,

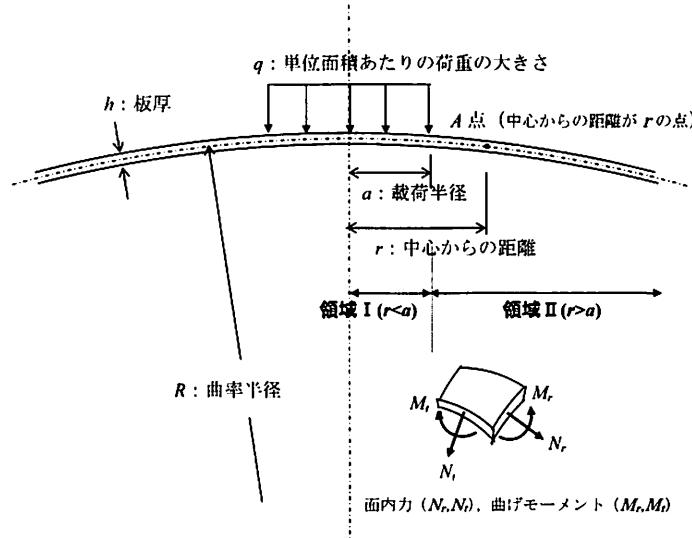


図 1 円形等分布荷重を受ける偏平球殻。

$$l^2 = \frac{Rh}{\sqrt{12(1-\nu^2)}}, \quad l : \text{特性長}, \quad \alpha = \frac{a}{l}, \quad ' = \frac{d}{dx},$$

$ber, bei, ker, kei$  : kelvin 関数

領域 II ( $x > \alpha$ ) において,

$$\left. \begin{aligned} w &= \frac{RP_t}{Eh^2} \frac{\sqrt{12(1-\nu^2)}}{\pi} \\ &\cdot \left\{ \left( \frac{ber' \alpha}{\alpha} \right) ker x - \left( \frac{bei' \alpha}{\alpha} \right) kei x \right\} \\ F &= \frac{RP_t}{\pi} \left\{ \left( -\frac{bei' \alpha}{\alpha} \right) ker x \right. \\ &\left. - \left( \frac{ber' \alpha}{\alpha} \right) kei x - \frac{1}{2} \log x \right\} \end{aligned} \right\} \quad \dots \dots \dots (3)$$

## 2.2 曲げモーメント解と面内力解

図 1 に示される曲げモーメント  $M_r, M_t$ , 面内力  $N_r, N_t$  は  $w, F$  を用いて, 次式 (4) で求められる。

$$\left. \begin{aligned} M_r &= -D \left( \frac{d^2 w}{dr^2} + \nu \frac{dw}{r dr} \right), \\ M_t &= -D \left( \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} + \nu \frac{d^2 w}{dr^2} \right), \\ N_r &= \frac{1}{r} \frac{dF}{dr}, \quad N_t = \frac{d^2 F}{dr^2} \end{aligned} \right\} \quad \dots \dots \dots (4)$$

領域 I ( $x < \alpha$ ) において,

式 (2) を式 (4) に代入する。

$$\left. \begin{aligned} M_{r1} &= - \left( \frac{P_t}{\pi} \right) \left[ \left( \frac{ker' \alpha}{\alpha} \right) \left\{ -beix - (1-\nu) \frac{ber' x}{x} \right\} \right. \\ &\left. - \left( \frac{kei' \alpha}{\alpha} \right) \left\{ berx - (1-\nu) \frac{bei' x}{x} \right\} \right] \\ M_{t1} &= - \left( \frac{P_t}{\pi} \right) \left[ \left( \frac{ker' \alpha}{\alpha} \right) \left\{ -vbeix + (1-\nu) \frac{ber' x}{x} \right\} \right. \\ &\left. - \left( \frac{kei' \alpha}{\alpha} \right) \left\{ vberx + (1-\nu) \frac{bei' x}{x} \right\} \right] \end{aligned} \right\} \quad \dots \dots \dots (5)$$

$$\left. \begin{aligned} N_{r1} &= - \left( \frac{P_t}{h} \right) \left( \frac{\sqrt{12(1-\nu^2)}}{\pi} \right) \left\{ \left( \frac{kei' \alpha}{\alpha} \right) \frac{ber' x}{x} \right. \\ &\left. + \left( \frac{ker' \alpha}{\alpha} \right) \frac{bei' x}{x} + \frac{1}{2\alpha^2} \right\} \\ N_{t1} &= - \left( \frac{P_t}{h} \right) \left( \frac{\sqrt{12(1-\nu^2)}}{\pi} \right) \left\{ \left( \frac{kei' \alpha}{\alpha} \right) (-beix) \right. \\ &\left. - \frac{ber' x}{x} \right\} + \left( \frac{ker' \alpha}{\alpha} \right) (berx - \frac{bei' x}{x}) + \frac{1}{2\alpha^2} \end{aligned} \right\} \quad \dots \dots \dots (6)$$

領域 II ( $x > \alpha$ ) において,

同様に, 式 (3) を式 (4) に代入して式 (7), (8) を得る。

$$\left. \begin{aligned} M_{r11} &= - \left( \frac{P_t}{\pi} \right) \left[ \left( \frac{ber' \alpha}{\alpha} \right) \left\{ -keix - (1-\nu) \frac{ker' x}{x} \right\} \right. \\ &\left. - \left( \frac{bei' \alpha}{\alpha} \right) \left\{ ker x - (1-\nu) \frac{kei' x}{x} \right\} \right] \\ M_{t11} &= - \left( \frac{P_t}{\pi} \right) \left[ \left( \frac{ber' \alpha}{\alpha} \right) \left\{ -vkeix + (1-\nu) \frac{ker' x}{x} \right\} \right. \\ &\left. - \left( \frac{bei' \alpha}{\alpha} \right) \left\{ vker x + (1-\nu) \frac{kei' x}{x} \right\} \right] \end{aligned} \right\} \quad \dots \dots \dots (7)$$

$$\left. \begin{aligned} N_{r11} &= - \left( \frac{P_t}{h} \right) \left( \frac{\sqrt{12(1-\nu^2)}}{\pi} \right) \left\{ \left( \frac{bei' \alpha}{\alpha} \right) \frac{ker' x}{x} \right. \\ &\left. + \left( \frac{ber' \alpha}{\alpha} \right) \frac{kei' x}{x} + \frac{1}{2x^2} \right\} \\ N_{t11} &= - \left( \frac{P_t}{h} \right) \left( \frac{\sqrt{12(1-\nu^2)}}{\pi} \right) \left\{ \left( \frac{bei' \alpha}{\alpha} \right) \left( -keix - \frac{ker' x}{x} \right) \right. \\ &\left. + \left( \frac{ber' \alpha}{\alpha} \right) \left( ker x - \frac{kei' x}{x} \right) - \frac{1}{2x^2} \right\} \end{aligned} \right\} \quad \dots \dots \dots (8)$$

## 3. 短期載荷力に関する検討

### 3.1 シングル荷重問題

ここでは, 単一の円形等分布荷重を受ける場合を論ずる。この場合, 最大引張応力  $\sigma_{smax}$  は載荷中心のシェル下面に生じ, その大きさは式 (5), (6) を用いて式 (9) で与えられる。

$$\sigma_{s\max} = \left[ \frac{M_{r1}}{\left( \frac{h^2}{6} \right)} + \frac{N_{r1}}{h} \right]_{x=0} = \frac{1}{k_{s\text{精}}} \left( \frac{P_t}{h^2} \right),$$

ここに、 $k_{s\text{精}}$ ：載荷係数,

$$k_{s\text{精}} = \frac{1}{\left( \frac{3}{\pi} \right) (1+\nu) \left( \frac{kei'\alpha}{\alpha} \right) - \left( \frac{\sqrt{3}(1-\nu^2)}{\pi} \right) \left( \frac{ker'\alpha}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} \right)} \quad \dots \dots \dots (9)$$

図2に $\alpha < 0.8$ における $k_s$ 精- $\alpha$ 曲線を示す。水に浮かぶ氷板の問題 (Kerr, 1976) と同様に、 $\alpha$ が0.15～0.35の間で、 $k_s$ 精は $\alpha$ の一次関数で極めて精度よく近似できる。式(10)は $\nu = 0.3$ における( $\alpha = 0.2$ ,  $k_s$ 精 = 0.8467)と( $\alpha = 0.3$ ,  $k_s$ 精 = 1.0683)を結ぶ直線を表す。以下では、この近似式を用いて、重さ100kgの人間がアイスドーム上に載った時の構造安全性を検討する。これは、建設施工中及び維持管理中を問わず、様々な事情から、人がドーム上に載ることがあり、その際の構造安全性を確保するのに必要な氷厚を検討することにはかならない。

$$k_{s\text{近}} = 0.4035(1 + 5.492\alpha) \quad \dots \dots \dots (10)$$

まず、靴底の大きさを10cm×30cmとして、

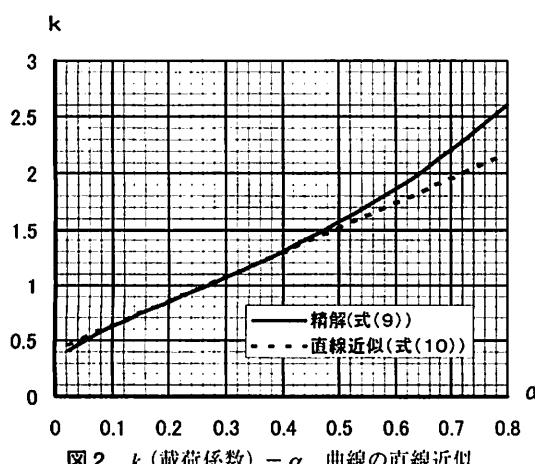


図2  $k$ (載荷係数)- $\alpha$ 曲線の直線近似。

その等価半径： $a$ を $a = \sqrt{\frac{300}{3.14}} = 9.8\text{cm} \rightarrow 10\text{cm}$ で与える。

$\nu = 0.3$ として、

$$x = \frac{a}{l} = \frac{a}{\sqrt{Rh}} \sqrt{12(1-\nu^2)} = \frac{18.18}{\sqrt{Rh}}$$

さらに、建設されるアイスドームの開角は120°とすると、結局

$$\alpha = \frac{23.93}{\sqrt{D_s h}} \text{ となる。ここに, } D_s \text{ はドームの底面直径。}$$

式(10)を用いて、 $D_s$ が15mと30mの場合について計算した結果を表1に示す。

なお、自重による圧縮応力 $\sigma_c$ (kg/cm<sup>2</sup>)は、シェルの膜理論を用いて、それぞれ、 $D_s = 15\text{m} \rightarrow \sigma_c = 0.37\text{ kg/cm}^2$ ,  $D_s = 30\text{ m} \rightarrow \sigma_c = 0.74\text{ kg/cm}^2$ となるが、ここでは、安全側評価とするため、 $\sigma_c$ を無視して検討を進める。まず、氷の短期曲げ強度を10kg/cm<sup>2</sup>と想定する。これは、本アイスドーム工法(型枠空気膜上に繰り返し丹念に散雪散水)によって造られる氷は密度が0.85g/cm<sup>3</sup>程度の良質な人工の多結晶氷である(Kokawa, 1985)ことや多結晶氷の引張強度は歪速度が $(10^{-6} \sim 10^0)$ sec<sup>-1</sup>の範囲でほぼ一定でその値は10kg/cm<sup>2</sup>を上回っている(Frederking, 1975 : Mellor, 1979 : RIL, 2002)ことからすると、控えめに曲げ強度を評価していることになる。さらに、その曲げ強度を安全率で除した許容曲げ応力をここでは3kg/cm<sup>2</sup>と設定して、 $\sigma_{s\max}$ がこの許容曲げ応力以下であれば、短期曲げ破壊に対してアイスドームは十分な安全性を有しているものと判断した。結論として、15m以下のドームの最小氷厚は6cm, 15mを超えて30m以下のドームの最小氷厚は7cmとなる。

表1 シングル荷重問題の検討 ( $P_t = 100\text{ kg}$ )。

$D_s(\text{m})$	$h(\text{cm})$	$\alpha$	$k_{s\text{精}}$	$\sigma_{s\max}(\text{kg}/\text{cm}^2)$
15	5	0.276	1.016	3.94
	6	0.252	0.962	2.89
30	6	0.178	0.799	3.48
	7	0.165	0.769	2.65

### 3.2 ツイン荷重問題

ドーム頂上に、2つの、大きさと形状が同一の円形等分布荷重（それぞれ、 $P_t$ ：総荷重、 $a$ ：載荷半径）が荷重中心間距離 $s$ 離れて作用する場合を考える。まず、シングル荷重問題において、シェル下面の引張応力は常に、 $\sigma_t \geq \sigma_r$ の関係にあることが、第2章の曲げモーメント、面内力の諸結果から明らかである。ここに、 $\sigma_t$ 、 $\sigma_r$ はそれぞれ、シェル下面の周方向、半径方向の応力を示し、等号が成立するのは、荷重中心直下点である。シングル荷重問題におけるシェル下面の応力 $\sigma_s$ あるいは $f_s(x)$ は式(11)で与えられる。

$$\sigma_s = \frac{M_t}{\left(\frac{h^2}{6}\right)} + \frac{N_t}{h} = f_s(x) \left(\frac{P_t}{h^2}\right) \text{ とおく。}$$

$$f_s(x) = \begin{cases} = -\left(\frac{6}{\pi}\right) \left[ \left( \frac{\ker \alpha}{\alpha} \right) \left\{ -vbeix + (1-v) \frac{ber' x}{x} \right\} \right. \\ \left. - \left( \frac{kei \alpha}{\alpha} \right) \left\{ vberx + (1-v) \frac{bei' x}{x} \right\} \right] \\ - \left( \frac{\sqrt{12(1-\nu^2)}}{\pi} \right) \left\{ \left( \frac{kei' \alpha}{\alpha} \right) \left( -beix - \frac{ber' x}{x} \right) \right. \\ \left. + \left( \frac{ker' \alpha}{\alpha} \right) \left( berx - \frac{bei' x}{x} \right) + \frac{1}{2\alpha^2} \right\}, & 0 \leq x \leq \alpha \\ = -\left(\frac{6}{\pi}\right) \left[ \left( \frac{ber' \alpha}{\alpha} \right) \left\{ -vkeix + (1-v) \frac{ker' x}{x} \right\} \right. \\ \left. - \left( \frac{bei' \alpha}{\alpha} \right) \left\{ v ker x + (1-v) \frac{kei' x}{x} \right\} \right] \\ - \left( \frac{\sqrt{12(1-\nu^2)}}{\pi} \right) \left\{ \left( \frac{bei' \alpha}{\alpha} \right) \left( -keix - \frac{ker' x}{x} \right) \right. \\ \left. + \left( \frac{ber' \alpha}{\alpha} \right) \left( ker x - \frac{kei' x}{x} \right) - \frac{1}{2x^2} \right\}, & x \geq \alpha \end{cases} \quad \dots \dots \dots (11)$$

図3に2つの $f_s$ 、即ち $f_s(x)$ 曲線と $f_s(x-s)$ 曲線の概形を示す。ここで、 $0 \leq x \leq s/2$ における $f_d(x) = f_s(x) + f_s(x-s)$ の最大値を求めればよいが、ここでは、両端の値、 $f_d(0) = f_s(0) + f_s(s)$ と $f_d\left(\frac{s}{2}\right) = 2f_s\left(\frac{s}{2}\right)$ のうち、大きいほうを、ツイン荷重問題の最大値 $f_{dmax}$ と見なして議論を進める。明らかに $s > 2\alpha$ であるから、 $s$ の範囲に応じて、

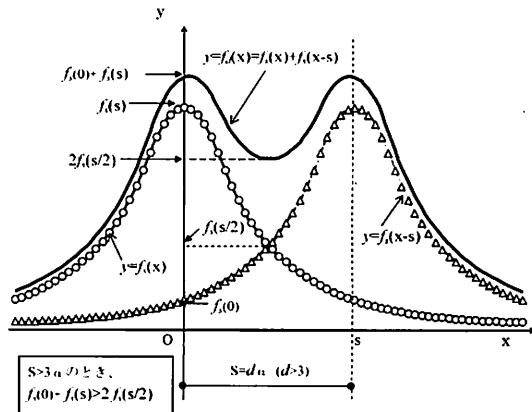


図3 ツイン荷重下の応力分布。

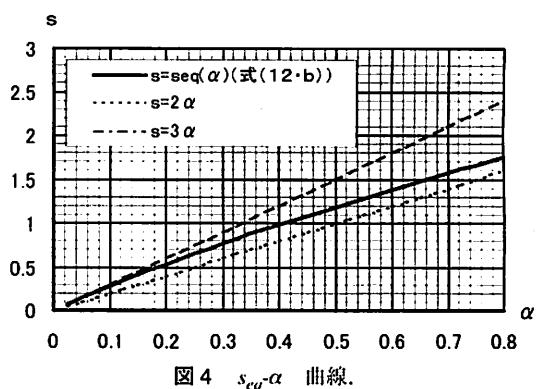


図4  $s_{eq}-\alpha$  曲線。

$$2\alpha < s < s_{eq} \text{ のとき, } f_d\left(\frac{s}{2}\right) > f_d(0) \quad \dots \dots \dots (12.a)$$

$$s = s_{eq} \text{ のとき, } f_d\left(\frac{s}{2}\right) = f_d(0) \quad \dots \dots \dots (12.b)$$

$$s < s_{eq} \text{ のとき, } f_d\left(\frac{s}{2}\right) < f_d(0) \quad \dots \dots \dots (12.c)$$

なる関係がある。式(12.b)を解いて、 $s_{eq}$ と $\alpha$ の関係を求めると、図4に示されるように $s_{eq}-\alpha$ 曲線は $s = 2\alpha$ と $s = 3\alpha$ で挟まれた領域内にある。以上より、 $s = d\alpha$ とおいて、 $d \geq 3$ であれば $f_d\left(\frac{s}{2}\right) < f_d(0)$ が成立し、 $f_d(0)$ は式(13)

で与えられる。

$$\begin{aligned}
f_d(0) = & -\left(\frac{6}{\pi}\right)\left[\frac{\text{ber}'\alpha}{\alpha}\{-vkei(d\alpha)+(1-v)\frac{\ker'(d\alpha)}{(d\alpha)}\}\right. \\
& \left.-\frac{\text{bei}'\alpha}{\alpha}\{v\ker(d\alpha)+(1-v)\frac{\text{kei}'(d\alpha)}{(d\alpha)}\}\right] \\
& -\frac{\sqrt{12(1-v^2)}}{\pi}\left\{\frac{\text{bei}'\alpha}{\alpha}\left(-\text{kei}(d\alpha)-\frac{\ker'(d\alpha)}{(d\alpha)}\right)\right. \\
& +\frac{\text{ber}'\alpha}{\alpha}\left(\ker(d\alpha)-\frac{\text{kei}'(d\alpha)}{(d\alpha)}\right)-\frac{1}{2(d\alpha)^2}\left.\right\} \\
& +\left(\frac{3}{\pi}\right)(1+v)\left(\frac{\text{kei}'\alpha}{\alpha}\right)-\frac{\sqrt{12(1-v^2)}}{2\pi}\left(\frac{\ker'\alpha}{\alpha}+\frac{1}{\alpha^2}\right)
\end{aligned} \quad \dots \dots \dots (13)$$

前節のシングル荷重問題に倣って、本問題における載荷係数： $k_d = \frac{1}{f_d(0)}$  を式 (14) に示される  $\alpha$  に関する一次式で近似する。

$$k_{d\text{eff}} = A(d)\alpha + B(d) \quad \dots\dots\dots (14)$$

ここに,  $A(d)$ ,  $B(d)$  は図 5 a,b に示される曲線となる. 尚,  $\lim_{d \rightarrow \infty} A(d), \lim_{d \rightarrow \infty} B(d)$  は, 式(10) よりそれぞれ, 2.2160, 0.4035 となる.

この近似曲線に基づいて、数値シミュレーション

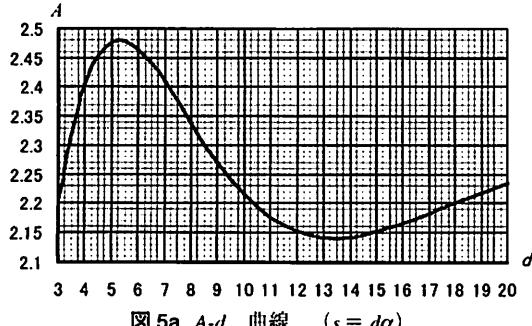


図 5a A-d 曲線 ( $s = d\alpha$ ).

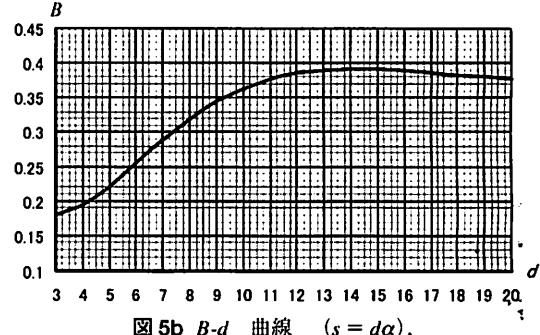


表2 ツイン荷重問題の検討 ( $P_t = 100 \text{ kg}$ )

$D(m)$	$h(cm)$	$\alpha$	$d$	$A(d)$	$B(d)$	$k_{d, \alpha}$	$\sigma_{\text{dmax}}(\text{kg/cm}^2)$
15	6	0.252	5	2.4766	0.22036	0.844	3.29
			10	2.2153	0.36382	0.922	3.01
30	7	0.165	5	2.4766	0.22036	0.629	3.24
			10	2.2153	0.36382	0.729	2.80

ドーム完成時点におけるアイスドームの氷厚は、底面直径が 10 m ~ 30 m の規模に対応して、12 cm ~ 25 cm の範囲にあり、上述の最小氷厚を大きく上回ることから、今回の問題に対して充分な安全性を有することは明らかである。しかし、建設過程でのドーム上での施工作業や春先の気温と日射による氷厚の薄化過程でのドーム上での除雪作業において、ドームの氷厚は完成時点に於ける氷厚よりも薄く、本論文で提示した近似式によって、構造安全性を検討しておく必要がある。

なお、本論文において、氷の短期曲げ強度を  $10 \text{ kg/cm}^2$  とした。しかし、多結晶氷の短期引張強度は  $10 \text{ kg/cm}^2$  を上回ることや本アイスドーム工法で造られる氷は散雪散水による良質な人工の多結晶氷であることなどを考慮すると、 $10 \text{ kg/cm}^2$  以上の曲げ強度が期待できるものと思われる。言うまでもなく短期曲げ強度の評価は本問題の工学的解決に係わる極めて重要な研究テーマであり、今後において、本工法によって造られる氷の曲げ強度について、その平均値やバラツキといった統計的性質の実状を実験的に解明しておく必要がある。

#### [付録] 円形等分布荷重解の誘導

集中荷重  $P$  の解、即ち、基本解  $w_f$ ,  $F_f$ 、は式 (A-1) で与えられる (Timoshenko, S. P. and Woinoensky-Krieger, S., 1959b)。

$$\left. \begin{aligned} w_f &= -\frac{\sqrt{3(1-\nu^2)}}{\pi} \frac{Pa}{Eh^2} \operatorname{keix} \\ F_f &= -\frac{Pa}{2\pi} (\ker x + \log x) \end{aligned} \right\} \quad (\text{A-1})$$

$$\text{ここに, } x = \frac{r}{l}, \quad l = \left( \frac{Rh}{\sqrt{2(1-\nu^2)}} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad l : \text{特性長}$$

ここで、 $w_f$  は、液体に浮かぶ弾性平板の集中荷重解、即ち Hertz 問題の解 (Timoshenko, S. P. and Woinoensky-Krieger, S., 1959a) と形式的に同一表現式となっており、したがって、本問題における円形等分布荷重の解  $w$  は、よく知られた (Wyman, 1950) の解において、式 (A-1) の特性長を代入することによって本文の式 (2), (3) が得られる。そこで、 $w$  は省略し、ここでは、応力関数解  $F$  についてのみ誘導過程を示す。

まず、リング荷重の場合の解  $F_r$  を求める。そのため、図 A-1において、点 A に集中荷重  $P = q_l \xi_a l d\theta$  ( $q_l$  : リング荷重の単位長さにおける荷重) が作用したときの点 Q の  $dF_r$  は前述より、

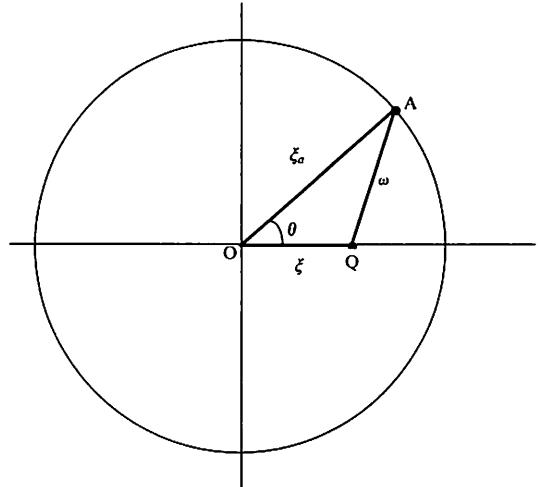


図 A-1 加法定理 ( $\xi < \xi_a$ )。

$$dF_r = -\frac{q_l \xi_a l R}{2\pi} (\ker \omega + \log \omega) d\theta$$

$$\omega = \sqrt{\xi_a^2 + \xi^2 - 2\xi_a \xi \cos \theta}$$

荷重が半径  $\xi_a$  の円周上に単位長さあたり  $ql$  の大きさで一様に分布するとき、点 Q の応力関数  $F_r$  は重ね合わせの原理によって、

$$F_r = \int dF_r = -\frac{q_l \xi_a l R}{\pi} \int_0^\pi (\ker \omega + \log \omega) d\theta$$

$\int_0^\pi \ker \omega d\theta$  の積分は  $\ker \omega$  に関する加法定理を用いて演算を行い (Watson, 1922)，結局、式 (A-2) で与えられる。

$$\int_0^\pi \ker \omega d\theta = \begin{cases} \pi(\ker \xi_a \operatorname{ber} \xi - \operatorname{kei} \xi_a \operatorname{bei} \xi), & \xi \leq \xi_a \\ \pi(\ker \xi_a \operatorname{ber} \xi_a - \operatorname{kei} \xi_a \operatorname{bei} \xi_a), & \xi \geq \xi_a \end{cases} \quad (\text{A-2})$$

$\int_0^\pi \log \omega d\theta$  の積分は式 (A-3) で与えられる (森口繁一, 宇田川, 一松信, 1971)。

$$\int_0^\pi \log \omega d\theta = \begin{cases} \pi \log \xi_a, & \xi \leq \xi_a \\ \pi \log \xi, & \xi \geq \xi_a \end{cases} \quad (\text{A-3})$$

以上より、リング荷重解は式 (A-4) で与えられる。

$$F_r = \begin{cases} -Rl q_l \xi_a \{(\ker \xi_a \operatorname{ber} \xi - \operatorname{kei} \xi_a \operatorname{bei} \xi) \\ \quad + \log \xi_a\}, & \xi \leq \xi_a \\ -Rl q_l \xi_a \{(\operatorname{ber} \xi_a \ker \xi - \operatorname{bei} \xi_a \operatorname{kei} \xi) \\ \quad + \log \xi\}, & \xi \geq \xi_a \end{cases} \quad (\text{A-4})$$

円形等分布荷重の解  $F$  はリング荷重解  $F_r$  を半径方向に重ね合わせて求められる。

$q_l = qdr = qld\xi$ ,  $q$  は単位面積あたりの荷重で一定とする。

$$dF_{r_1} = -Rl^2 q \xi \{ (\ker \xi b eix - kei \xi b eix) \\ + \log \xi \} d\xi, \quad x \leq \xi \\ dF_{r_2} = -Rl^2 q \xi \{ (ber \xi \ker x - bei \xi \ker x) \\ + \log x \} d\xi, \quad x \geq \xi \\ F = \begin{cases} \int_{\xi=x}^{\xi_a} dF_{r_1} + \int_0^{\xi=x} dF_{r_2}, & 0 \leq x \leq \xi_a \\ \int_0^{\xi_a} dF_{r_2}, & x \geq \xi_a \end{cases} \quad (A-5)$$

式 (A-5) の右辺の積分を実行すると、これらは本式の式 (2), (3) における  $F$  となる。

## 文 献

- Association of Finnish Civil Engineers RIL, 2002: Snow Constructions-General rules for design and construction, 20-25.
- Frederking, R., 1975: Mechanical Properties of Ice and Their Application to Arctic Ice Platforms. Ice Tech Symposium, Montreal, Canada, April 9-11, K. 1-K. 10., The Society of Naval Architects and Marine Engineers.
- Mellor, M., 1979: Mechanical Properties of Polycrystalline Ice. 217-245, IUTAM Symposium Copenhagen 1979,

Physics and Mechanics of Ice, Editor Per Tryde, Springer-Verlag.

森口繁一, 宇田川鉢久, 一松信, 1971 : 数学公式 III, 一特殊函数一, pp. 174-177., 岩波全書。

Kerr, A.D., 1976: The bearing capacity of floating ice plates subjected to static or quasi-static loads. J. Glaciology, 17, 229-268.

Kokawa, T., 1985: Experimental Studies on Ice Shell in Asahikawa. Cold Regions Science and Technology, Vol. 11, 150-170.

Kokawa, T., Watanabe, K. and Itoh, O., 2000: Ice Shell-Recent Application to Winter Architecture. Proc. 10th Int. Offshore and Polar Eng. Conf., Seattle, ISOPE, Vol. 1, 716-721.

粉川 牧, 伊藤 修, 渡辺 大, 2002 : スパン 20 m アイスドームの建設実験とクリープ測定. 雪氷 64 卷 1 号, 59-68 頁。

粉川 牧, 2002 : スパン 30 m アイスドーム建設の試み. 雪氷 64 卷 4 号, 469-476 頁。

Timoshenko, S. P. and Woinesky-Krieger, S., 1959a: Theory of Plates and Shells, McGraw-Hill, London, 2nd Ed., 259-269.

Timoshenko, S. P. and Woinesky-Krieger, S., 1959b: Theory of Plates and Shells, McGraw-Hill, London, 2nd Ed., 558-561.

Watson, G. N., 1922: Treatise on the Theory of Bessel Functions. 358-372., Cambridge.

Wyman, M., 1950: Deflection of an infinite plate. Canadian Journal of Research, Ser. A, Vol. 28, 293-302.

## Numerical investigation of structural safety of ice dome under short-term uniformly circular load

Tsutomu KOKAWA<sup>1)</sup>

1) School of Art and Technology, Hokkaido Tokai University

**Abstract:** This paper describes a numerical investigation of structural safety when the ice dome is subjected to a concentrated load such as a human live load on the apex. Regarding the problem as a short-term loading and the elastic behavior of ice, the elastic solution is based on the theory of a spherical shallow shell under a uniformly small circular load. Both the cases of single load and twin loads on a dome are investigated, assuming that the ice dome will break when the tensile stress reaches a certain maximum value. Estimating that the weight of a human is 100 kg and the allowable stress of the ice is 3 kg/cm<sup>2</sup>, where the bending strength is 10 kg/cm<sup>2</sup>, it is concluded that the minimum thickness of the ice becomes 6 cm under a 15 m span, and 7 cm over a 15 m to 30 m span, even though the distance is 1 m in case of twin loads.

(2004 年 5 月 24 日受付, 2004 年 7 月 26 日改稿受付, 2004 年 8 月 31 日受理, 討論期限 2005 年 5 月 15 日)