

ケーブル式はさみ・アーチの研究

(その3・滑車条件を考慮した構造解析とその力学的性状について)

粉 川 牧*¹, 渡 辺 宏 二*², 上 木 克 則*³,

A STUDY ON CABLE SCISSORS ARCH PART III STRUCTURAL ANALYSIS OF CSA WITH ZIGZAG-CABLE THROUGH PULLEY-JOINTS

by

Tsutomu Kokawa*¹, Koji Watanabe*², Katsunori Ueki*³

Abstract

The basic idea of a new type expandable arch structure which is called 'CSA (CABLE SCISSORS ARCH)', was described at the previous paper.

The structural analysis of CSA is developed here, by a mathematical treatment of the pulley-joints as 'Simply Pinned Joint without Friction'. According to the computational analysis of the model, it is shown numerically that the zigzag cable plays an important roles for CSA in the point of structural efficiency improvement.

1. はじめに

既報(その1)で提案された「ケーブル式はさみアーチ」では、図1に示されるように、はさみユニットの連結部に滑車が設けられており、長尺の可撓性ケーブルが各滑車を通してジグザグ状に配置されている。この構造体をアーチ形状の場合について考えてみると、自重のもとでは、重力の存在によってケーブルには絶えず引っ張りが作用する安定した静定骨組となっている。この構造体は一種のトラス構造とみなされ、主に曲げで抵抗する通常の「はさみ構造体」に比較して、力学的性能即ち強度と剛性が向上することが直観的に予想されるが、その定量的評価は明らかではない。

本報告では、滑車の力学的モデルを「フリクション・フリーのすべり節点」と仮定して「ケーブル式はさみアーチ、以後 CSA (Cable Scissors Arch) と称す。」(図2)の構造解析法を対称鉛直載荷問題の場合について展開し、その力学的性状を「従来型ケーブルなしのはさみアーチ、以後 SA (Scissors Arch) と称す。」(図3)及び「SA に束材ケーブルを付加した、はさみトラスアーチ、以後 STA (Scissors

原稿受理: 1995年9月28日

*¹北海道東海大学芸術工学部建築学科・教授

*²北海道東海大学芸術工学部建築学科・講師

*³北海道東海大学芸術工学部建築学科・4年生

Trussed Arch)」(図4)との比較によって、数値解析的に明らかにすることを目的としている。

2. 滑車条件を考慮した「ケーブル式はさみアーチ (CSA)」の構造解析

2-a ケーブル配置と滑車の力学モデル

図5は本報告で対象となっているCSAのケーブル配置の詳細を示したものである。都合2本の長尺ケーブルが用いられ、それぞれのケーブルは中央ヒンジ点を起点に各滑車をジグザグ状に通過して、各支点で押し返えされ、再び各滑車をジグザグ状に通過し、中央ヒンジ点に緊結されている。即ち、各ケーブルは、それぞれジグザグ状ではあるが、1ループ形成として配置されているものとする。ケーブルと滑車の間には、実際には僅かながら摩擦力が発生すると思われるが、ここでは理想化して滑車節点を摩擦なしの所謂「すべり節点」としてモデル化する。従って、張力は各ケーブルで一定値をとるものと仮定する。

2-b 応力伝達マトリクス表示

図6は「CSA」の応力をユニット*i*と(*i*+1)について示したものである。ユニット*i*に於いて、左側応力ベクトル $\{X_{il}\}$ と右側応力ベクトル $\{X_{ir}\}$ の関係は、節点①、②に於ける力の釣合 ($\sum X = 0$, $\sum Y = 0$) を考慮して式(1)で与えられる。

$$\{X_{ir}\} = [A] \{X_{il}\} + \{a\} T \quad \text{-----(1)}$$

ここに、図6を参照しつつ、*T*はケーブル張力を、

$$\{X_{ir}\} = \begin{Bmatrix} N_{iru} \\ Q_{iru} \\ N_{ird} \\ Q_{ird} \end{Bmatrix}, \quad \{X_{il}\} = \begin{Bmatrix} N_{ilu} \\ Q_{ilu} \\ N_{ild} \\ Q_{ild} \end{Bmatrix}, \quad \{a\} = \begin{Bmatrix} 2(1 + \cos \beta) \cos \beta \\ 2(1 + \cos \beta) \sin \beta \\ 2(1 + \cos \alpha) \cos \alpha \\ -2(1 + \cos \alpha) \sin \alpha \end{Bmatrix}$$

$$[A] = \begin{bmatrix} -\cos 2\beta & -\sin 2\beta & 0 & 0 \\ -\sin 2\beta & \cos 2\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ 0 & 0 & \sin 2\alpha & \cos 2\alpha \end{bmatrix} \quad \text{をそれぞれ表す。}$$

さらに、ユニット*i*の右側応力ベクトル $\{X_{ir}\}$ とユニット(*i*+1)の左側応力ベクトル $\{X_{(i+1)l}\}$ の関係は、節点③に於ける力の釣合より式(2)で与えられる。

$$\{X_{(i+1)l}\} = [B] \{X_{ir}\} + \{b_i\} P_i \quad \text{-----(2)}$$

$$\{X_{(i+1)l}\} = \begin{Bmatrix} N_{(i+1)lu} \\ Q_{(i+1)lu} \\ N_{(i+1)ld} \\ Q_{(i+1)ld} \end{Bmatrix}, \quad \{b_i\} = \begin{Bmatrix} -\frac{\cos(\varphi_0 - 2it - \theta)}{\sin 2\theta} \\ 0 \\ \frac{\cos(\varphi_0 - 2it + \theta)}{\sin 2\theta} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$[B] = \begin{bmatrix} 0 & -(1+\xi)\operatorname{cosec} 2\theta & 1 & -\left(1+\frac{1}{\xi}\right)\cot 2\theta \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\xi} \\ 1 & (1+\xi)\cot 2\theta & 0 & \left(1+\frac{1}{\xi}\right)\operatorname{cosec} 2\theta \\ 0 & \xi & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \xi = \frac{l_2}{l_1}$$

式(1), (2)より $\{X_{ir}\}$ を消去して, $\{X_{il}\}$ と $\{X(i+1)\}$ の関係式(3)を得る。

$$\{X_{(i+1)l}\} = [C] \{X_{il}\} + \{d\} T + \{b_i\} P_i \quad \text{---(3)}$$

ここに,

$$[C] = [B][A], \quad \{d\} = [B]\{a\}$$

式(3)より, $\{X_{il}\}$ と $\{X_{II}\}$ の関係式(4)を得る。

$$\{X_{il}\} = [C]^{(i-1)} \{X_{II}\} + \left(\sum_{k=1}^{i-1} [C]^{(i-k-1)} \right) \{d\} T + \sum_{k=1}^{i-1} [C]^{(i-k-1)} \{b_k\} P_k \quad \text{---(4)}$$

ここに,

$$[C] = [B][A]$$

$$= \begin{bmatrix} (1+\xi)\frac{\sin 2\beta}{\sin 2\theta} & -(1+\xi)\frac{\cos 2\beta}{\sin 2\theta} & -\cos 2\alpha - \left(1+\frac{1}{\xi}\right)\cot 2\theta \sin 2\alpha & \sin 2\alpha - \left(1+\frac{1}{\xi}\right)\cot 2\theta \cos 2\alpha \\ 0 & 0 & \frac{1}{\xi} \sin 2\alpha & \frac{1}{\xi} \cos 2\alpha \\ -\cos 2\beta - (1+\xi)\cot 2\theta \sin 2\beta & -\sin 2\beta + (1+\xi)\cot 2\theta \cos 2\beta & \left(1+\frac{1}{\xi}\right)\frac{\sin 2\alpha}{\sin 2\theta} & \left(1+\frac{1}{\xi}\right)\frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\theta} \\ -\xi \sin 2\beta & \xi \cos 2\beta & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\{d\} = [B]\{a\} = \begin{bmatrix} -(1+\xi)\frac{1}{\sin 2\theta} 2(1+\cos \beta) \sin \beta + 2(1+\cos \alpha) \cos \alpha + \left(1+\frac{1}{\xi}\right) \cot 2\theta 2(1+\cos \alpha) \sin \alpha \\ -\frac{1}{\xi} 2(1+\cos \alpha) \sin \alpha \\ 2(1+\cos \beta) \cos \beta + (1+\xi) \cot 2\theta 2(1+\cos \beta) \sin \beta - \left(1+\frac{1}{\xi}\right) \frac{1}{\sin 2\theta} 2(1+\cos \alpha) \sin \alpha \\ \xi 2(1+\cos \beta) \sin \beta \end{bmatrix}$$

従って, $\{X_{nl}\}$ は式(4)において, $i = n$ において,

$$\{X_{nl}\} = [C]^{(n-1)} \{X_{II}\} + \left(\sum_{k=1}^{n-1} [C]^{(n-k-1)} \right) \{d\} T + \sum_{k=1}^{n-1} [C]^{(n-k-1)} \{b_k\} P_k$$

さらに, 式(1)の関係より, 結局 $\{X_{nr}\}$ は $\{X_{II}\}$ を用いて, 次式で表される。

$$\{X_{nr}\} = [A][C]^{(n-1)} \{X_{II}\} + [A] \left(\sum_{k=1}^{n-1} [C]^{(n-k-1)} \right) \{d\} T + [A] \sum_{k=1}^{n-1} [C]^{(n-k-1)} \{b_k\} P_k \quad \text{---(5)}$$

2-c 両端応力ベクトル $\{X_{1l}\}$, $\{X_{nr}\}$ 表示

図7を参照して、支点における釣合いを考えて、

$$\{X_{1l}\} = \{e\}T + \{f\} \quad , \quad \{e\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad , \quad \{f\} = \begin{Bmatrix} H \frac{\sin(\theta - \varphi_0)}{\sin 2\theta} + V \frac{\cos(\theta - \varphi_0)}{\sin 2\theta} \\ 0 \\ H \frac{\sin(\theta + \varphi_0)}{\sin 2\theta} - V \frac{\cos(\theta + \varphi_0)}{\sin 2\theta} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{---(6)}$$

ここに、 H 、 V はそれぞれ支点水平、垂直反力で、通常の3ヒンジ・アーチの場合と同様にして、力の釣合条件式のみによって容易に求められる。

もう一方の端部、即ちユニット n の右側部分の応力ベクトル $\{X_{nr}\}$ は、図8に示されるように、中央ヒンジ点の釣合を考えて、次式(7)で表される。

$$\{\bar{X}_{nr}\} = \{e\}T + \{g\} \quad , \quad \{g\} = \begin{Bmatrix} \frac{H}{2 \cos \theta} - \frac{P_n}{4 \sin \theta} \\ 0 \\ \frac{H}{2 \cos \theta} + \frac{P_n}{4 \sin \theta} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{.....(7)}$$

ここで、式(5)、(6)による $\{X_{nr}\}$ と式(7)の $\{\bar{X}_{nr}\}$ を等置して、ケーブル張力： T を未知数とする方程式(8)を得る。

$$\begin{aligned} & \left[[A][C]^{(n-1)}\{e\} + [A] \left(\sum_{k=1}^{n-1} [C]^{(n-k-1)} \right) \{d\} + \{a\} - \{e\} \right] T \\ & = \{g\} - [A][C]^{(n-1)}\{f\} - [A] \sum_{k=1}^{n-1} [C]^{(n-k-1)} \{b_k\} P_k \quad \text{---(8)} \end{aligned}$$

式(8)より算定される T は4つあるが、いずれも同一の値となる。この T を式(4)、(1)に戻して、結局、全ての応力が求められる。

以上より分かるように、「CSA」の応力は基本的には力の釣合条件のみで求められる。これは、「CSA」が一種の静定骨組と考えられることから、至極当然のことかも知れない。

なお、各節点の変位は仮想仕事式によった。

3. 「はさみアーチ (SA)」の構造解析

図4で示される「SA」は2ヒンジ・アーチタイプで、その支点反力の内垂直反力 V はただちに求められる。ここでは、水平反力 H を未知数として2で示した方法と同様の方法によって、解析できることを以下に概略示す。

すなわち、まず前項2における式中、すべて $T = 0$ とおく。

次に、 $\{X_{1l}\}$ を式(9)で表す。

$$\{X_{11}\} = \{\zeta\} V + \{\eta\} H \quad \text{---(9)}$$

ここに

$$\{\zeta\} = \begin{Bmatrix} \frac{\cos(\theta - \varphi_0)}{\sin 2\theta} \\ 0 \\ \frac{\cos(\theta + \varphi_0)}{\sin 2\theta} \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \{\eta\} = \begin{Bmatrix} \frac{\sin(\theta - \varphi_0)}{\sin 2\theta} \\ 0 \\ \frac{\sin(\theta + \varphi_0)}{\sin 2\theta} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

そして、中央点における対称性条件すなわち $\{X_{nr}\} = \{X_{(n+1)r}\}$ を用いる。

以上より、Hを未知数とする方程式(10)を得る。

$$\begin{aligned} ([C]^n - [A][C]^{(n-1)})\{\eta\}H &= [A] \sum_{k=1}^{n-1} [C]^{(n-k-1)} \{b_k\} P_k - \sum_{k=1}^{n-1} [C]^{(n-k)} \{b_k\} P_k \\ &\quad + ([A][C]^{(n-1)} - [C]^n)\{\zeta\}V \quad \text{---(10)} \end{aligned}$$

Hは4つ計算されるが、これらは同一の値となることが計算結果上確認された。結局、全ての応力が求められることになる。

なお、変位計算は2と同様、仮想仕事式によった。

4. 力学的性状の比較検討

図2, 3, 4で示されるCSA, SA, STAの対称鉛直荷重下における力学的性状を以下に示すある特定な解析モデルについて数値解析的に比較検討する。なお、STAの数値解析法については、同名論文(その2)に詳述したので、そちらを参照されたい。

4-1 解析モデル諸元

円弧アーチ形状とし、スパン(支点間距離): $s = 10\text{m}$, ライズ: $h = 4\text{m}$ とする。

はさみ構造体に関する諸元として、部材断面積: $A = 100\text{cm}^2$, 断面2次モーメント: $J = 833\text{cm}^4$, ヤング係数: $E = 70\text{t/cm}^2$, 部材長: $L = 103.7128\text{cm}$ ($L_1 = 49.0026\text{cm}$, $L_2 = 54.7102\text{cm}$), ユニット数(片側): $N = 8$ とする。

ケーブル(1本あたり)については、断面積: $A_t = 1\text{cm}^2$, ヤング係数: $E_t = 2000\text{t/cm}^2$ とする。STAの束材ケーブルの断面積は、CSA(図5で示したように、本報告においてケーブルはダブル配置されている。)との比較という意味から、ここでは2本分と評価し2 cm^2 を与える。

荷重は対称鉛直荷重とし、各ユニットのクロス・ポイントに一律10kgを与える。

4-2 数値解析結果および比較検討

図9, 図10, 図11にそれぞれCSA, SA, STAの鉛直変位、軸力及びせん断力に関する解析結果を示す。

a CSAとSAの比較

図9と図10を比較して、ケーブルのジグザグ導入配置が強度及び剛性の向上に極めて効果的であることが一目瞭然である。応力の状況とはさみ部材の断面性能（ここでは、一様断面材と想定）から判断して、クロス・ポイントに発生する曲げモーメント即ち部材せん断力はこれら構造体の強度と最も深く関連するものと思われる（CSA、SAは共に静定構造であり、ローカルな破壊は構造全体の崩壊に結びつく）。即ち、最大せん断力の比：SA/CSAは $25.76/4.41=5.84$ であり、CSAの強度はSAのその約6倍となることが推定される。一方、鉛直変位について、その分布形はよく似ているが、定量的にかなりの差異が見られる。例えば最大変位はいずれも中央点で発生するが、その比はSA/CSA= $128.69\text{mm}/4.035\text{mm}=31.9$ となり、大幅に剛性が改善されていることが認められる。なお、CSAは静定構造であり、その応力状態は部材断面性能によらず力の釣合条件のみで決定されることから、CSAの力学的性能はケーブル断面積の大小に依存しないことが予測される。

b CSAとSTAの比較

図9と図11の比較より、STAの方がCSAよりも力学的性能が優れているが、両者の差異はCSAとSAの場合に比べて小さい。せん断力に関して、最大値の比はCSA/STA= $4.41/2.03=2.16$ であり、CSAの強度はSTAの約半分と推定される。また、はさみユニット毎にそのユニットを構成する2本の部材せん断力分布は、STAの場合ほぼ同一であるのに対して、CSAの場合は1本はせん断力が微小で他はSTAのほぼ2倍のせん断力が生じている。

はさみ構造体の軸力に関して、分布状況はほぼ同じであり、その最大値の比CSA/STA= $10.32/7.76=1.33$ となっている。CSAのケーブル張力は2本分として33.2kgであるのに対して、STAの東材引張軸力は中央から支点にかけて25.9kgから50.1kgに漸増変化している。STAの東材引張軸力は中央から支点にかけて25.9kgから50.1kgに漸増変化している。STAの東材軸力の平均値は33.1kgで、CSAのケーブル張力とはほぼ同じである。

鉛直変位に関して、最大値はいずれも中央点で生じ、その比はCSA/STA= $4.035\text{mm}/3.843=1.050$ ではほぼ同じ大きさであるが、その変形モードは頂点近傍を除いて両者は異なり、STAの場合は通常のアーチと同様に一部持ち上がり現象が見られる。

5. まとめ

はさみユニットの連結部で用いられている滑車の力学的モデルを‘フリクション・フリーのすべり節点’として扱い、CSA（Cable Scissors Arch：アーチ状のはさみ連結体にケーブルをジグザグ状に配置した構造体）の構造解析法を展開した。ある特定な構造モデルについて数値計算を実行し、その力学的性状をSA（Scissors Arch：はさみアーチ）及びSTA（Scissors Trussed Arch：はさみトラス・アーチ）との比較によって、数値解析的に検討した。その結果、CSAはSAに比べて、格段に強度と剛性が高く力学的に優る構造体であることが明らかになり、ケーブルのはさみ構造体へのジグザグ導入配置が一種のトラス作用をもたらす力学的合理性を高めるという当初の直観的予測の正しさが解析的に実証された。

謝辞：本研究の遂行に際し、1994年度北海道東海大学教育研究基金の補助を受けた。ここに謝意を表します。

参考文献

1. 粉川牧, 渡辺宏二:「ケーブル式はさみアーチの研究 (その 1・基本アイデアの縮尺モデルによる検討, その 2・構造解析モデルの比較検討)」北海道東海大学芸術工学部紀要 第14号, P. 1-13, P. 15-26 (1994)
2. KOKAWA TSUTOMU: [A TRIAL OF EXPANDABLE ARCH], PROCEEDINGS OF IASS 1995-MILANO, Vol. 1 pp.501-510

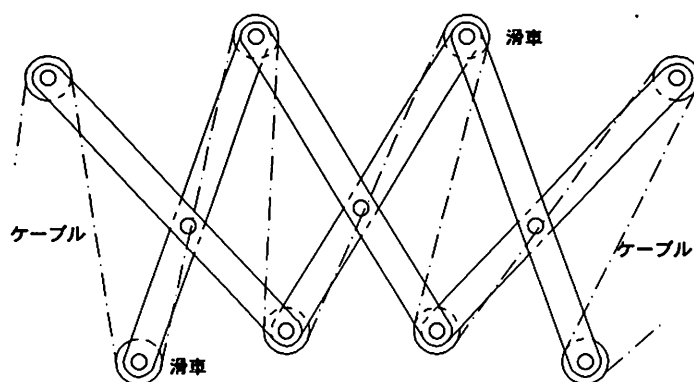


図1 ケーブルのジグザグ配置

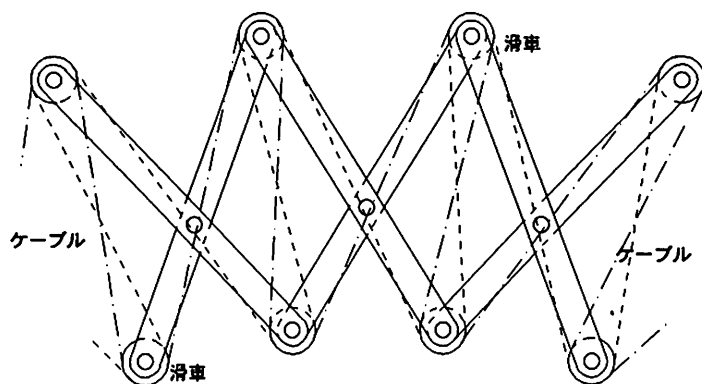


図5 ケーブルのダブルジグザグ配置

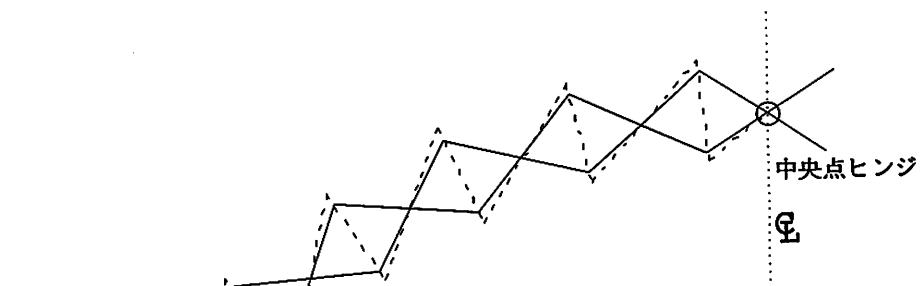


図2 CSA (Cable Scissors Arch)
ケーブル式はさみアーチ

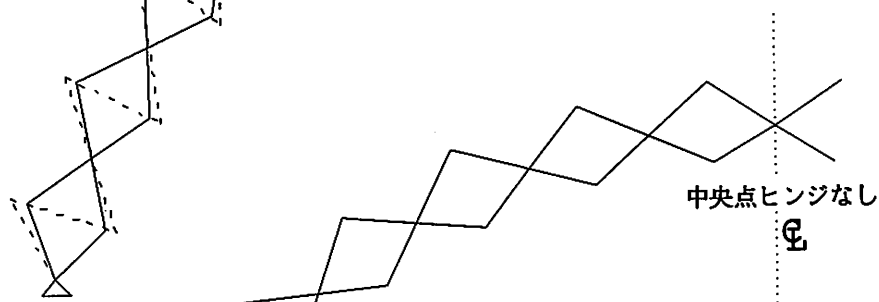


図3 SA (Scissors Arch)
はさみアーチ

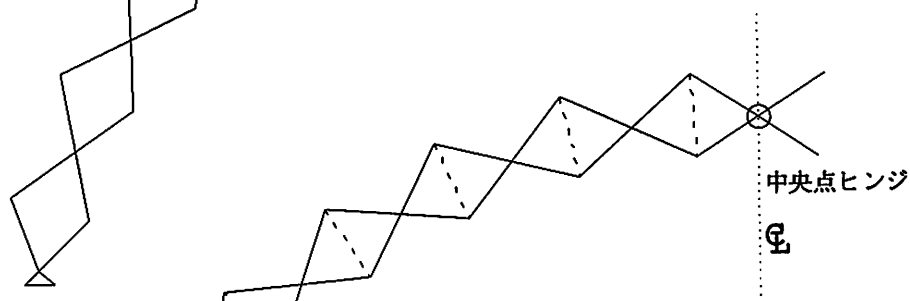


図4 STA (Scissors Trussed Arch)
はさみトラスアーチ

:ケーブル

:ケーブル

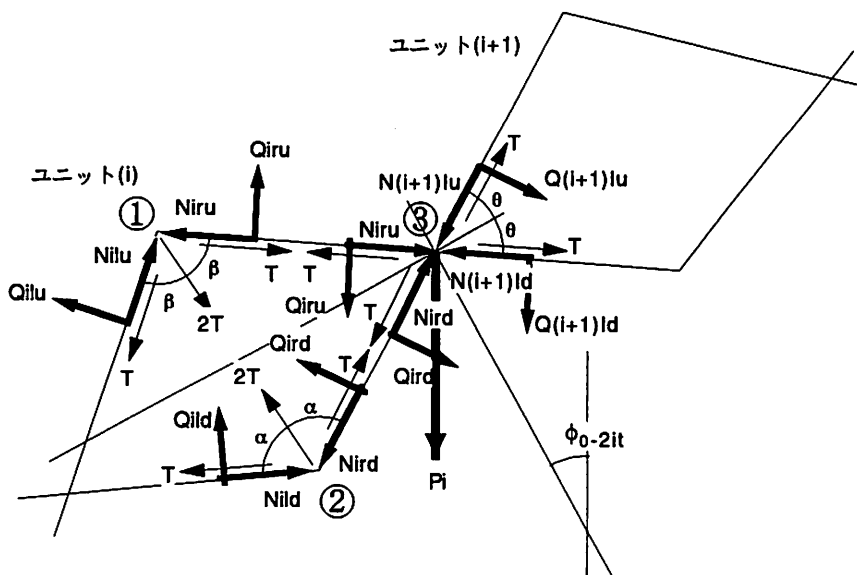


図6 応力伝達マトリックスの誘導

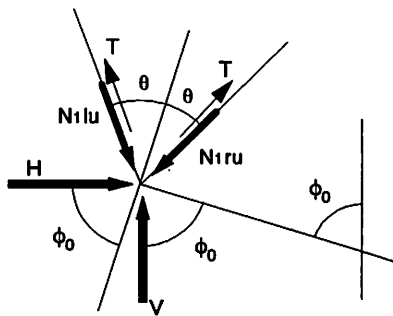


図7 支点における釣合い

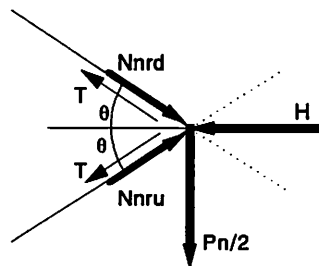


図8 中央ヒンジ点における釣合い

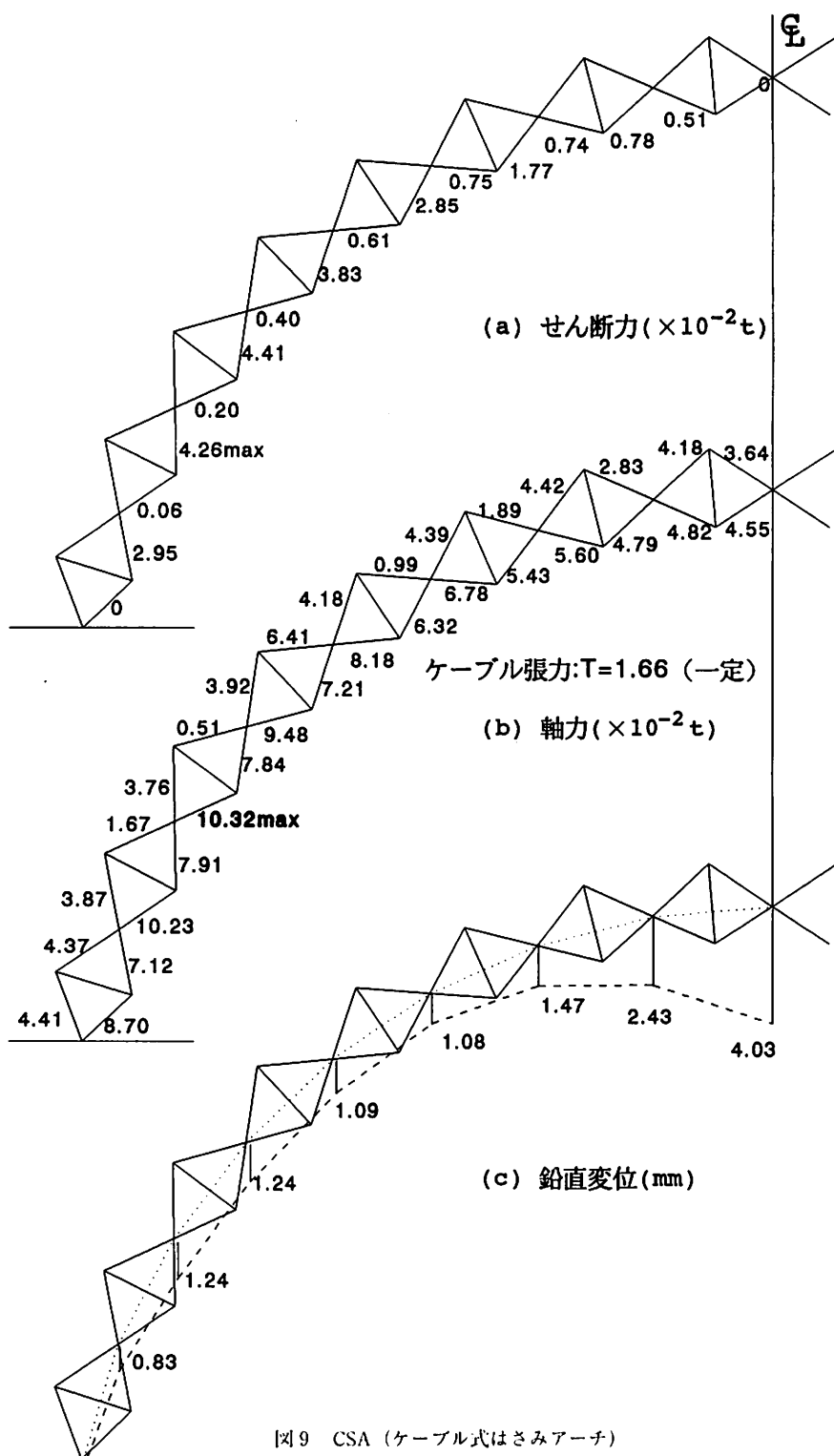


図9 CSA (ケーブル式はさみアーチ)

