

# ケーブル式はさみ・アーチの研究

## (その2・構造解析モデルの比較検討)

粉 川 牧\*<sup>1</sup>, 渡 辺 宏 二\*<sup>2</sup>

# A Study on Cable Scissors Arch

## Part II Analytical Models for Structural Statics

by

Tsutomu Kokawa\*<sup>1</sup>, Kouji Watanabe\*<sup>2</sup>

### Abstract

Two methods of geometrically nonlinear analysis for Scissors arch with zigzag cable, are developed in this paper. The one is based on the framed model, and the other one is developed by a spring model which reduces the number of freedom drastically compared with the framed model. As the results of numerical analysis for the both models, it is shown that the spring model gives a high approximate solution.

### 1. はじめに

同名論文その1<sup>1)</sup>では、本研究で対象とするケーブル式はさみ・アーチの構工法に関してその基本アイデアを示した。即ち、はさみの機構にヒントを得て、その連結体に引張りケーブルをジグザグ状に配置し、ウインチ等に巻き上げ巻き戻し操作によって、構造体の形状変化を可能ならしめる方法である。このとき形成される構造体は、例えば、ハウトラスにおいてその上下弦材を除去して得られるような特殊トラスとなり、一種のテンセグリテー構造とも見なせる。特にアーチ形状の場合、重力の作用の下では、はさみ構造体には主に圧縮力が、束材としてのケーブルには引張り力が、それぞれ発生し、力学的合理性に適った構造体となっている。

本報告では、この構造体の力学的性状を理論的に解明するための構造解析方法を2つ記述し、数値解析例を呈示して両者の比較検討を行っている。1つは骨組モデルに立脚したものである。はさみ構造体の線形解析については既に ESCRIG 等<sup>2)</sup>の研究があるが、ここでは、大変形挙動も追跡が可能なように、幾何学的非線形領域まで拡張して解析法を展開している。なお、はさみ構造体の要素剛性マトリクスの誘導に際して、一般の骨組解析法<sup>3), 4)</sup>を参照して、曲げについては棒材の座屈方程式の厳

---

原稿受理：1994年9月29日

\*<sup>1</sup> 北海道東海大学芸術工学部建築学科・教授

\*<sup>2</sup> 北海道東海大学芸術工学部建築学科・助手

密解<sup>5)</sup>を採用している。他の1つは、バネモデルに関したもので、はさみユニットを力学的に等価な回転バネと軸バネに置換している。これによって、解析自由度数は大幅に縮小され、特に、某大な未知数をもつ3次元的構造体を解析する場合に、極めて有効な方法と思われる。

## 2. 骨組モデルの解析法

### 2-1. 基本部材の剛性マトリックス

図・1に示すはさみユニットを構成している基本部材の剛性マトリックスを誘導するために、まず、 $i-j-k$ 材について考える。ここで、 $i, k$ 点はピン、部材軸力は圧縮力そして部材曲げ剛性は一樣とする。

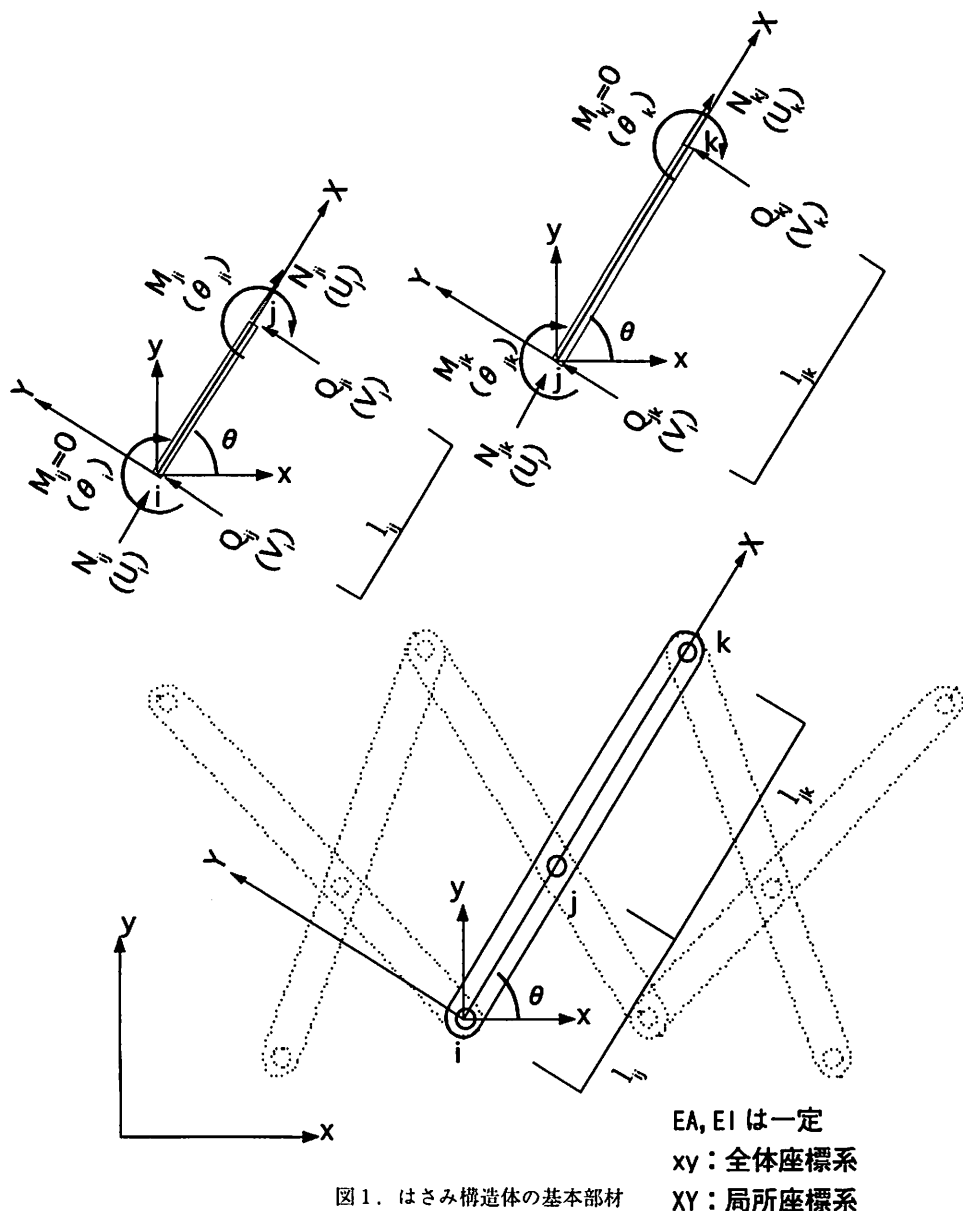


図1. はさみ構造体の基本部材

i j 材において、座屈撓角法の基本式 ( $EIy'''' + Ny'' = 0$ の解) を適用<sup>5)</sup>すると、

$$M_{ij} = \frac{EI}{\ell_{ij}} (\alpha_{ij} \theta_i + \beta_{ij} \theta_{ji} - \gamma_{ij} R_{ij}) \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$M_{ji} = \frac{EI}{\ell_{ij}} (\beta_{ij} \theta_i + \alpha_{ij} \theta_{ji} - \gamma_{ij} R_{ij}) \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$\text{ここに, } \alpha_{ij} = \frac{\phi_{ij} (\sin \phi_{ij} - \phi_{ij} \cos \phi_{ij})}{2(1 - \cos \phi_{ij}) - \phi_{ij} \sin \phi_{ij}}$$

$$\beta_{ij} = \frac{\phi_{ij} (\phi_{ij} - \sin \phi_{ij})}{2(1 - \cos \phi_{ij}) - \phi_{ij} \sin \phi_{ij}}$$

$$\gamma_{ij} = \alpha_{ij} + \beta_{ij}, \quad \phi_{ij} = \sqrt{\frac{N_{ij}}{EI}}, \quad R_{ij} = \frac{V_i - V_j}{\ell_{ij}}$$

$\phi_{ij} \rightarrow 0$ のとき、 $\alpha_{ij} \rightarrow 4$ 、 $\beta_{ij} \rightarrow 2$ 、 $\gamma_{ij} \rightarrow 6$ となり、線形撓角法の基本式と一致する。

$$M_{ij} = 0 \text{より, } \theta_i = \frac{(\gamma_{ij} R_{ij} - \beta_{ij} \theta_{ji})}{\alpha_{ij}} \text{ 従って, 式(3)を得る。}$$

$$M_{ji} = \frac{EI \gamma_{ij} (\alpha_{ij} - \beta_{ij}) (\theta_{ji} - R_{ij})}{\ell_{ij} \alpha_{ij}} \quad \dots\dots\dots (3)$$

j k 材についても、同様な過程を経て、式(4)を得る。

$$M_{jk} = \frac{EI \gamma_{jk} (\alpha_{jk} - \beta_{jk}) (\theta_{jk} - R_{jk})}{\ell_{jk} \alpha_{jk}} \quad \dots\dots\dots (4)$$

j 点の節点方程式： $M_{ji} + M_{jk} = 0$ と回転角の連続性： $\theta_{ji} = \theta_{jk} = \theta_j$ より、

$$\theta = f(\phi_{ij}, \phi_{jk}) R_{ij} + g(\phi_{ij}, \phi_{jk}) R_{jk} \quad \dots\dots\dots (5)$$

$$\text{ここに, } f(\phi_{ij}, \phi_{jk}) = \frac{\ell_{jk} \zeta_{ij}}{\ell_{jk} \zeta_{ij} + \ell_{ij} \zeta_{jk}}, \quad g(\phi_{ij}, \phi_{jk}) = \frac{\ell_{ij} \zeta_{jk}}{\ell_{jk} \zeta_{ij} + \ell_{ij} \zeta_{jk}} = 1 - f$$

$$\zeta_{ij} = \frac{\gamma_{ij} (\alpha_{ij} - \beta_{ij})}{\alpha_{ij}}, \quad \zeta_{jk} = \frac{\gamma_{jk} (\alpha_{jk} - \beta_{jk})}{\alpha_{jk}}$$

i j 材について回転に関する釣合い考えると、

$$M_{ij} (=0) + M_{ji} + N_{ij} (V_i - V_j) + Q_{ij} \ell_{ij} = 0 \text{ となり, 結局 } Q_{ij} \ell_{ij} \text{ は } V_i, V_j, V_k$$

に関する線形結合式(6)で与えられる。

$$\begin{aligned} Q_{ij} \ell_{ij} &= -\frac{EI \zeta_{ij}}{\ell_{ij}} (\theta_j - R_{ij}) - N_{ij} (V_i - V_j) \\ &= \left( \frac{EI \zeta_{ij} g}{\ell_{ij}^2} - N_{ij} \right) V_i + \left( -\frac{EI \zeta_{ij} g}{\ell_{ij}} \left( \frac{1}{\ell_{ij}} + \frac{1}{\ell_{jk}} \right) + N_{ij} \right) V_j + \frac{EI \zeta_{ij} g}{\ell_{ij} \ell_{jk}} V_k \quad \dots\dots\dots (6) \end{aligned}$$

$$\text{そして, } Q_{ji} = -Q_{ij} \quad \dots\dots\dots (6a)$$

j k 材についても、同様にして考え、結局、

$$Q_{jk} \ell_{jk} = -\frac{EI \zeta_{jkf}}{\ell_{ij} \ell_{jk}} V_i + \left( \frac{EI \zeta_{jkf}}{\ell_{jk}} \left( \frac{1}{\ell_{ij}} + \frac{1}{\ell_{jk}} \right) - N_{jk} \right) V_j + \left( -\frac{EI \zeta_{jkf}}{\ell_{jk}^2} + N_{jk} \right) V_k \quad \dots\dots\dots (7)$$

$$Q_{kj} = -Q_{jk} \quad \dots\dots\dots (7a)$$

$$\begin{aligned} \text{従って, } Q_{ji} + Q_{jk} = F_{jy} = & \left( -EI \left( \frac{\zeta_{ijg}}{\ell_{ij}^3} + \frac{\zeta_{jkf}}{\ell_{ij} \ell_{jk}^2} \right) + \frac{N_{ij}}{\ell_{ij}} \right) V_i \\ & + \left( \frac{EI \zeta_{ijg}}{\ell_{ij}} \left( \frac{1}{\ell_{ij}^2} + \frac{1}{\ell_{ij} \ell_{jk}} \right) - \frac{N_{ij}}{\ell_{ij}} + \frac{EI \zeta_{jkf}}{\ell_{jk}} \left( \frac{1}{\ell_{jk}^2} + \frac{1}{\ell_{ij} \ell_{jk}} \right) - \frac{N_{jk}}{\ell_{jk}} \right) V_j \\ & + \left( -EI \left( \frac{\zeta_{jkf}}{\ell_{jk}^3} + \frac{\zeta_{ijg}}{\ell_{ij}^2 \ell_{jk}} \right) + \frac{N_{jk}}{\ell_{jk}} \right) V_k \quad \dots\dots\dots (8) \end{aligned}$$

一方、部材端軸力と節点変位の関係式は、2次の微小項迄考慮すると、 $U_i - U_j$ の2乗項は相殺されて、式(9a)、(9b)で与えられる。

$$N_{ij} = \frac{EA}{\ell_{ij}} \left( (U_i - U_j) - \frac{(V_i - V_j)^2}{2 \ell_{ij}} \right), \quad N_{ji} = -N_{ij} \quad \dots\dots\dots (9a)$$

$$N_{jk} = \frac{EA}{\ell_{jk}} \left( (U_j - U_k) - \frac{(V_j - V_k)^2}{2 \ell_{jk}} \right), \quad N_{kj} = -N_{jk} \quad \dots\dots\dots (9b)$$

ここに、EA：軸剛性

従って、ijk材について軸方向節点力と節点変位の関係は式(9c)となる。

$$F_{iX} = N_{ij}$$

$$\begin{aligned} F_{jX} = N_{ji} + N_{jk} = & -\frac{EA}{\ell_{ij}} \left( (U_i - U_j) - \frac{(V_i - V_j)^2}{2 \ell_{ij}} \right) \\ & + \frac{EA}{\ell_{jk}} \left( (U_j - U_k) - \frac{(V_j - V_k)^2}{2 \ell_{jk}} \right) \quad \dots\dots\dots (9c) \end{aligned}$$

$$F_{kX} = N_{kj}$$

i-j-k材の局所座標系(XY)における要素剛性方程式とその増分式(Newton-Raphson式)は、それぞれ式(10)、(11)で表される。

$$\{F\} = [K] \{\Delta\} \quad \dots\dots\dots (10)$$

$$\{F\} + \{dF\} = [K] \{\Delta\} + [K_t] \{d\Delta\} \quad \dots\dots\dots (11)$$

ここに、 $\{F\}^t = (F_{iX}, F_{iY}, F_{jX}, F_{jY}, F_{kX}, F_{kY})$ ：節点力ベクトル

$\{\Delta\}^t = (U_i, V_i, U_j, V_j, U_k, V_k)$ ：節点変位ベクトル

[K]は、要素剛性マトリクスで、式(1)～式(9)をそのまま用いると、非対称マトリクスとなり、後に示される数値計算上、コンピュータの記憶容量の点で得策ではない。そこで式(11)では[K]を対称マトリクスとする為に、さらに、その接線剛性マトリクス： $[K_t]$ も対称化するために、 $F_{iY}$ ,  $F_{jY}$ ,  $F_{kY}$ に対応する[K]の行要素に非線形項：

$\frac{EA \{ (U_i - U_j) \text{ or } (U_j - U_k) \text{ or } (V_i - V_j) \text{ or } (V_j - V_k) \}}{2 \ell_{ij}^2 \text{ or } 2 \ell_{jk}^2}$  が加減されている。そして、 $[K]$  は、

$$[K] = [K_\ell] + [K_n] \quad \dots\dots\dots (12)$$

ここに、 $[K_\ell]$ 、 $[K_n]$  はそれぞれ、線形、非線形マトリクスで、いずれも、その大きさは  $6 \times 6$  の対称マトリクスである。以下に、これらの要素を上三角領域にて示す。

$$[K_\ell] \text{ 要素: } K_{\ell 11} = \frac{EA}{\ell_{ij}}, K_{\ell 12} = 0, K_{\ell 13} = -\frac{EA}{\ell_{ij}}, K_{\ell 14} = K_{\ell 15} = K_{\ell 16} = 0$$

$$K_{\ell 22} = \frac{EI \eta}{\ell_{ij}^2} - \frac{N_{ij}}{\ell_{ij}}, K_{\ell 23} = 0, K_{\ell 24} = -\frac{EI \eta}{\ell_{ij}} \left( \frac{1}{\ell_{ij}} + \frac{1}{\ell_{jk}} \right) + \frac{N_{ij}}{\ell_{ij}}, K_{\ell 25} = 0, K_{\ell 26} = \frac{EI \eta}{\ell_{ij} \ell_{jk}}$$

$$K_{\ell 33} = EA \left( \frac{1}{\ell_{ij}} + \frac{1}{\ell_{jk}} \right), K_{\ell 34} = 0, K_{\ell 35} = -\frac{EA}{\ell_{jk}}, K_{\ell 36} = 0$$

$$K_{\ell 44} = EI \eta \left( \frac{1}{\ell_{ij}} + \frac{1}{\ell_{jk}} \right)^2 - \frac{N_{ij}}{\ell_{ij}} - \frac{N_{jk}}{\ell_{jk}}, K_{\ell 45} = 0, K_{\ell 46} = -\frac{EI \eta}{\ell_{jk}} \left( \frac{1}{\ell_{ij}} + \frac{1}{\ell_{jk}} \right) + \frac{N_{jk}}{\ell_{jk}}$$

$$K_{\ell 55} = \frac{EA}{\ell_{jk}}, K_{\ell 56} = 0, K_{\ell 66} = \frac{EI \eta}{\ell_{jk}^2} - \frac{N_{jk}}{\ell_{jk}}$$

但し、 $\eta = \frac{\zeta_{ij} \zeta_{jk}}{\ell_{jk} \zeta_{ij} + \ell_{ij} \zeta_{jk}}$  は  $\phi_{ij}$ 、 $\phi_{jk}$  の関数で本来は非線形項であるが、

ここでは、定数項とみなしている。 $N_{ij}$ 、 $N_{jk}$  も同様に定数項としている。

$$[K_n] \text{ 要素: } K_{n11} = 0, K_{n12} = -\frac{EA}{2 \ell_{ij}^2} (V_i - V_j), K_{n13} = 0, K_{n14} = \frac{EA}{2 \ell_{ij}^2} (V_i - V_j), K_{n15} = K_{n16} = 0$$

$$K_{n22} = \frac{EA}{2 \ell_{ij}^2} (U_i - U_j), K_{n23} = \frac{EA}{2 \ell_{ij}^2} (V_i - V_j), K_{n24} = -\frac{EA}{2 \ell_{ij}^2} (U_i - U_j), K_{n25} = K_{n26} = 0$$

$$K_{n33} = 0, K_{n34} = -\frac{EA}{2 \ell_{ij}^2} (V_i - V_j) - \frac{EA}{2 \ell_{jk}^2} (V_j - V_k), K_{n35} = 0, K_{n36} = \frac{EA}{2 \ell_{jk}^2} (V_i - V_k)$$

$$K_{n44} = \frac{EA}{2 \ell_{ij}^2} (U_i - U_j) + \frac{EA (U_j - U_k)}{2 \ell_{jk}^2}, K_{n45} = \frac{EA}{2 \ell_{jk}^2} (V_j - V_k), K_{n46} = -\frac{EA}{2 \ell_{jk}^2} (U_j - U_k)$$

$$K_{n55} = 0, K_{n56} = -\frac{EA}{2 \ell_{jk}^2} (V_j - V_k), K_{n66} = \frac{EA}{2 \ell_{jk}^2} (U_j - U_k)$$

$\frac{\partial ([K] \{\Delta\})}{\partial \{\Delta\}} \{d\Delta\} = [K_\ell] \{d\Delta\}$  とおき、ここに、 $[K_\ell] = [K_\ell] + [K_{dn}]$  としたとき、

$$[K_{dn}] \text{ 要素: } K_{dn11} = K_{dn13} = K_{dn15} = K_{dn16} = 0, K_{dn12} = -\frac{EA}{\ell_{ij}^2} (V_i - V_j), K_{dn14} = \frac{EA}{\ell_{ij}^2} (V_i - V_j)$$

$$K_{dn22} = \frac{EA}{\ell_{ij}^3} V_i (V_i - V_j), K_{dn23} = \frac{EA}{\ell_{ij}^2} (V_i - V_j), K_{dn24} = -\frac{EA}{\ell_{ij}^3} (V_i - V_j)^2, K_{dn25} = K_{dn26} = 0$$

$$K_{dn33} = 0, K_{dn34} = -\frac{EA}{\ell_{ij}^2} (V_i - V_j) - \frac{EA}{\ell_{jk}^2} (V_j - V_k), K_{dn35} = 0, K_{dn36} = \frac{EA}{\ell_{jk}^2} (V_j - V_k)$$

$$K_{dn44} = \frac{EA}{\ell_{ij}^3} (V_i - V_j)^2 + \frac{EA (V_j - V_k)^2}{2 \ell_{jk}^3}, K_{dn45} = \frac{EA}{\ell_{jk}^2} (V_j - V_k), K_{dn46} = -\frac{EA}{\ell_{jk}^3} (V_j - V_k)^2$$

$$K_{dn55} = 0, K_{dn56} = -\frac{EA}{\ell_{jk}^2} (V_j - V_k), K_{dn66} = \frac{EA}{\ell_{jk}^3} (V_j - V_k)^2$$

さて、式(9)、(10)、(11)を全体座標系 (xy) にて表示すると、それぞれ、  

$$\{f\} + \{df\} = [k]\{\delta\} + [k_t]\{d\delta\} \quad \dots\dots\dots (14)$$

ここに、 $[k] = [k_l] + [k_n]$ ,  $[k_t] = [k_l] + [k_{dn}]$

なお、 $[k*] = [T]^t [K*] [T]$  で、 $[T]$  は座標変換マトリクスを示す。

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad \text{但し、} \theta \text{ は図・1 参照}$$

## 2-2. 全体剛性方程式の数値解析

以上によって、はさみ連結体を構成する各基本部材の全体座標系における剛性方程式が誘導された。一方、束材(引張材)の剛性方程式は通常の線形式を用い、それぞれのはさみ連結体と束材の剛性方程式を重畳して、はさみ、トラス構造体の全体座標系における剛性方程式及びその増分式が式(15)、(16)のように表される。

$$\{f_g\} = [k_g]\{\delta_g\} \quad \dots\dots\dots (15)$$

$$\{f_g\} + \{df_g\} = [k_g]\{\delta_g\} + [k_{gt}]\{d\delta_g\} \quad \dots\dots\dots (16)$$

式(15)、(16)は、荷重増分法あるいは変位増分法によって、逐次数値解が求められる。

## 3. バネモデルの提案

### 3-1. バネ定数の評価

ここでは、解析自由度数の大幅な低減(1はさみユニットあたり骨組モデルの自由度数が10に対して、本バネモデルでは2)をはかるために、はさみ・トラス構造体の力学モデルを図・2に示されるバネモデルに置換することを考える。

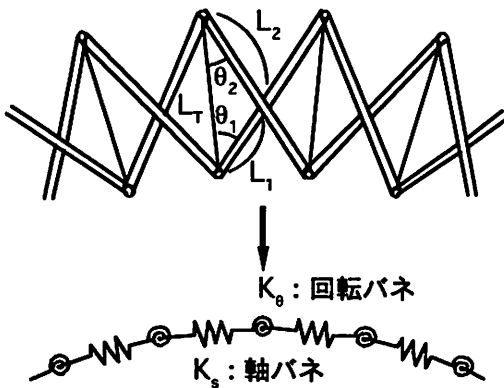


図2. 骨組モデル→バネモデル

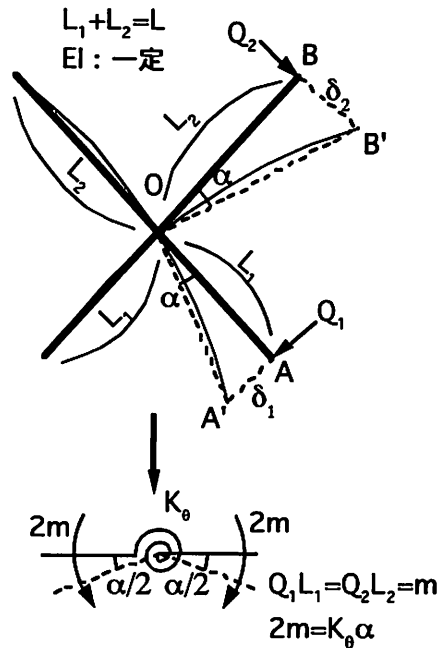


図3. 回転バネ定数の評価

まず、回転バネ： $K_\theta$ を次のようにして求める。

図・3より,

$$Q_1 L_1 = Q_2 L_2 = m, Q_1 L_1 + Q_2 L_2 = 2m, L = L_1 + L_2, \delta_1 = \frac{m L L_1}{3EI}, \delta_2 = \frac{m L L_2}{3EI}$$

$$\text{従って, } \frac{\delta_1}{L_1} = \frac{\delta_2}{L_2} = \alpha, \quad \triangle OBA = \triangle OB'A' \text{ (合同)}$$

$$K_\theta \alpha = 2m, \quad \text{故に, } K_\theta = \frac{6EI}{L} \quad \dots\dots\dots (17)$$

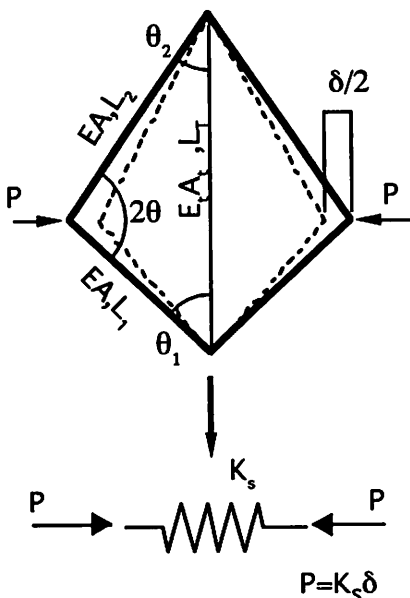


図4. 軸バネ定数の評価

軸バネ:  $K_s$ は図・4を参照して,

$$\delta = \frac{2N_1 N_1^* L_1}{EA} + \frac{2N_2 N_2^* L_2}{EA} + \frac{N_t N_t^* L_T}{E_t A_t}, \quad \text{ここに, } N_1 = \frac{P}{\sin \theta_1 + \cos \theta_1 \tan \theta_2}, \quad N_1^* = \frac{N_1}{P}$$

$$N_2 = \frac{P}{\sin \theta_2 + \cos \theta_2 \tan \theta_1}, \quad N_2^* = \frac{N_2}{P}, \quad N_t = \frac{2P}{\tan \theta_1 + \tan \theta_2}, \quad N_t^* = \frac{N_t}{P}$$

$$L_T^2 = L_1^2 + L_2^2 - 2L_1 L_2 \cos(2\theta), \quad E_t: \text{東材のヤング率, } A_t: \text{東材の断面積} \quad K_s = \frac{P}{\delta} \text{より,}$$

$$K_s = \frac{0.5}{\left( \frac{L_1}{EA (\sin \theta_1 + \cos \theta_1 \tan \theta_2)^2} + \frac{L_2}{EA (\sin \theta_2 + \cos \theta_2 \tan \theta_1)^2} + \frac{2L_T}{E_t A_t (\tan \theta_1 + \tan \theta_2)^2} \right)} \quad \dots\dots\dots (18)$$

### 3-2. はさみ・アーチのバネモデル基礎方程式

図・5に示されるバネモデルの基礎方程式をエネルギー・停留原理より導く。

まず, その非線形エネルギー汎関数は:  $\Pi$ は,

$$\begin{aligned} \Pi = & 0.5 \sum_{i=1}^n K_{si} \delta_i^2 + 0.5 K_{\theta 1} \alpha_1^2 + 0.5 \sum_{i=2}^n K_{\theta i} (\alpha_i - \alpha_{(i-1)})^2 + 0.5 K_{\theta (n+1)} \alpha_n^2 \\ & - \sum_{i=2}^n P_i v_i + \lambda_1 U_{n+1} + \lambda_2 v_{n+1} \quad \dots\dots\dots (19) \end{aligned}$$

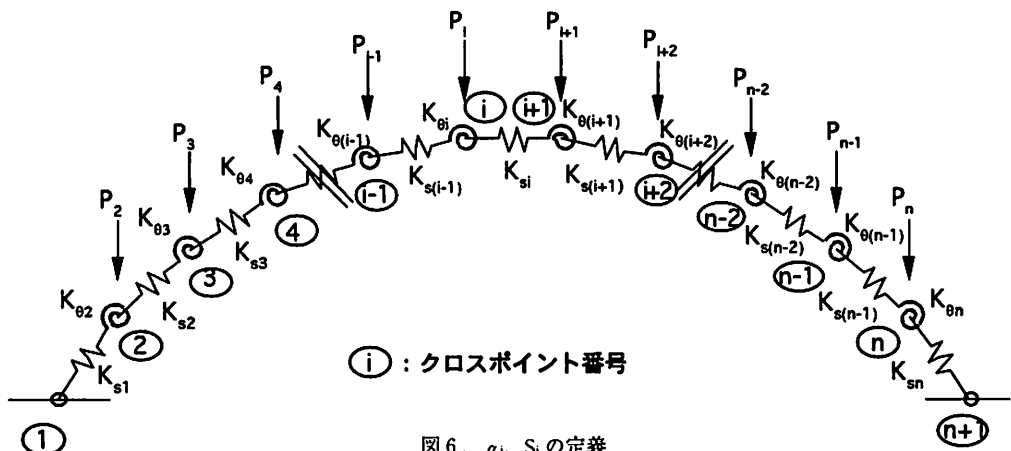


図 6.  $\alpha_i$ ,  $S_i$  の定義

但し、両端ピン条件より、 $u_1 = v_1 = u_{n+1} = v_{n+1} = 0$ ,  $K_{\theta 1} = K_{\theta(n+1)} = 0$

ここに、 $K_s$ ,  $K_{\theta}$ は軸バネ定数、回転バネ定数  $S$ ,  $\alpha$ は軸伸縮、角変位 (図・6 参照),  $P$ ,  $v$ は鉛直荷重、鉛直変位,  $l$ ,  $\theta$ はバネ長,  $x$  軸に対する初期角度,  $\lambda$ はラグランジュ乗数、添字  $i$ は部材番号、節点番号を意味する。なお、 $i$  点の鉛直変位:  $v_i$ は、

$$v_{n+1} = \sum_{j=1}^n (\ell_j + S_j) \sin(\theta_j + \alpha_j) = 0 \text{ を用いて,}$$

式 (20) で表される。

$$v_i = \sum_{j=1}^{i-1} ((\ell_j + S_j) \sin(\theta_j + \alpha_j) - \ell_j \sin \theta_j)$$

$$= 0.5 \left( \sum_{j=1}^{i-1} (\ell_j + S_j) \sin(\theta_j + \alpha_j) - \sum_{j=i}^n (\ell_j + S_j) \sin(\theta_j + \alpha_j) \right) \dots \dots \dots (20)$$

$\Pi$  の  $S_i$ ,  $\alpha_i$ ,  $\lambda_1$  に関する停留条件式が基礎方程式 (21) (22) (23) となる。

$$\frac{\partial \Pi}{\partial S_m} = K_{sm} S_m + \lambda_1 \cos(\theta_m + \alpha_m) - \gamma_m \sin(\theta_m + \alpha_m) = 0 \dots \dots \dots (21)$$

但し、 $m = 1, 2, \dots, n$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \alpha_j} = -K_{\theta j} \alpha_{j-1} + (K_{\theta j} + K_{\theta(j+1)}) \alpha_j - K_{\theta(j+1)} \alpha_{j+1} - \lambda_1 (\ell_j + S_j) \sin(\theta_j + \alpha_j) - \gamma_j (\ell_j + S_j) \cos(\theta_j + \alpha_j) = 0 \dots \dots \dots (22)$$

但し、 $j = 1, 2, \dots, n$ ,  $\alpha_0 = \alpha_{n+1} = 0$

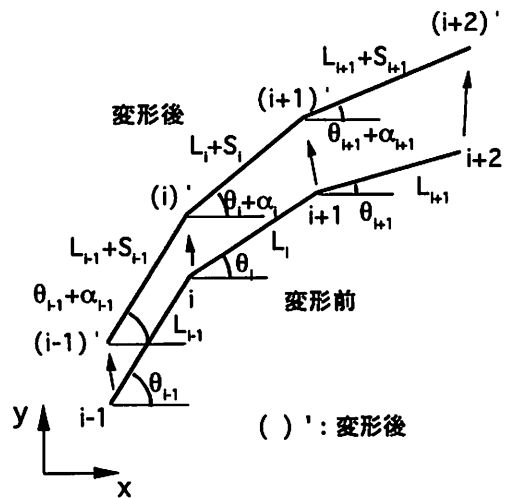


図 5. ケーブル式はさみアーチのバネモデル化

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \lambda_1} = \sum_{i=1}^n ((\ell_i + S_i) \cos (\theta_i + \alpha_i) - \ell_i \cos \theta_i) = 0 \quad \dots\dots\dots (23)$$

ここに、 $\gamma_m = 0.5 (P_{m+1} + \dots\dots + P_n - P_2 - P_3 \dots\dots\dots - P_m)$  で、これらの基礎方程式の数値解析は Newton-Raphson 法による。

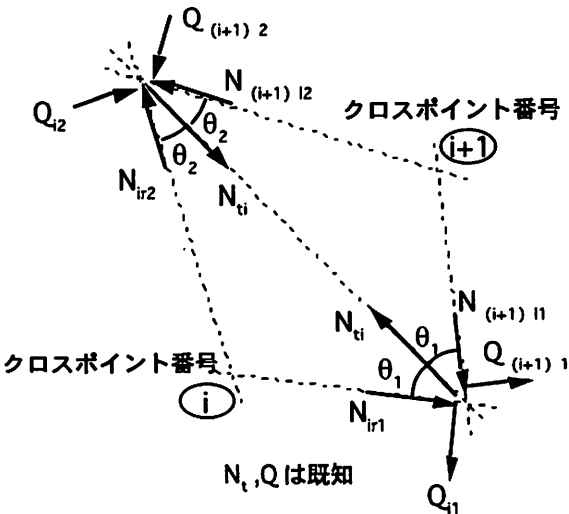


図 7. はさみ構造体の軸力算定

3-3. 部材応力

基礎方程式の数値解： $\alpha_i, S_i$ より，それぞれ  $M_i = K_{\theta i} \alpha_i, N_i = K_{si} S_i$ が算定され，さらに，部材せん断力： $Q_{ij} = 0.5 \frac{M_i}{\ell_j}$ ，但し， $j = 1, 2$ ，束材引張力： $N_{ti} = 2N_i / (\tan \theta_1 + \tan \theta_2)$  が求められる。これらの部材応力から，他の部材応力，すなわち，はさみ構造体の軸力： $N_{i+1j}, N_{irj}$ ，但し， $j = 1, 2$ は，図・7に示される要素の釣り合いを考慮して，式 (24a)，(24b) で与えられる。

$$N_{(i+1)1j} = 0.5 (Q_{ij} (\tan \theta_j - \cot \theta_j) + Q_{(i+1)j} (\tan \theta_j + \cot \theta_j) + N_{ti} \sec \theta_j) \quad \dots\dots\dots (24a)$$

$$N_{irj} = 0.5 (Q_{ij} (\tan \theta_j + \cot \theta_j) + Q_{(i+1)j} (\tan \theta_j - \cot \theta_j) + N_{ti} \sec \theta_j) \quad \dots\dots\dots (24b)$$

4. 数値解析例

図・8aに対象となった解析モデルを示す。ここに，はさみ構造体を構成している部材の解析諸元は図・3，4を参照して  $L = 200\text{cm}$ ， $L/L_1 = 2.208$ ， $A = 100\text{cm}^2$ ， $I = 833\text{cm}^4$ ， $E = 100\text{t/cm}^2$ ，束材のそれは， $A_t = 20\text{cm}^2$ ， $E_t = 100\text{t/cm}^2$ で，全体として3ヒンジ尖頭アーチ形状を示し，そのスパンは1039.2cm，支持点はピンとし支持点からセンター・ヒンジ迄の高さは300cmである。又，荷重は各クロス・ポイントに鉛直下向きに0.1tとする。式(17)，(18)によって，バネ定数を算定すると， $K_t = 2499\text{tcm/rad}$ ， $K_s = 20.12\text{t/cm}$ となる。

ここでは，線形範囲に於ける両モデルの解析結果を下図に示す。図・8bはクロス・ポイントの鉛直変位を示したもので，支持点近傍の上向き変形性状も含め，両者は極めて良く対応し，特に最大変

$L=200\text{cm}$      $L/L1=2.208$      $A=100\text{cm}^2$      $E=100\text{t/cm}^2$      $I=833\text{cm}^4$   
 $At=20\text{cm}^2$      $Et=100\text{t/cm}^2$

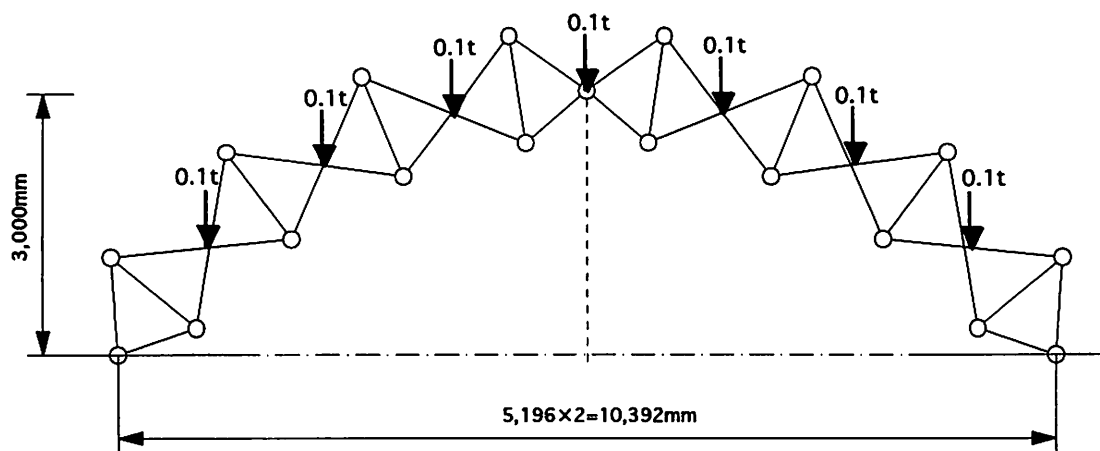


図 8 a. 解析モデル

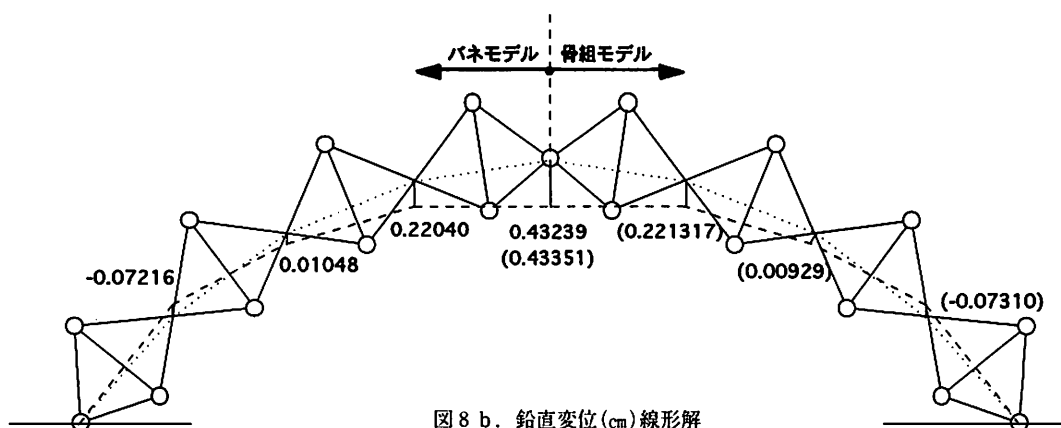


図 8 b. 鉛直変位 (cm) 線形解

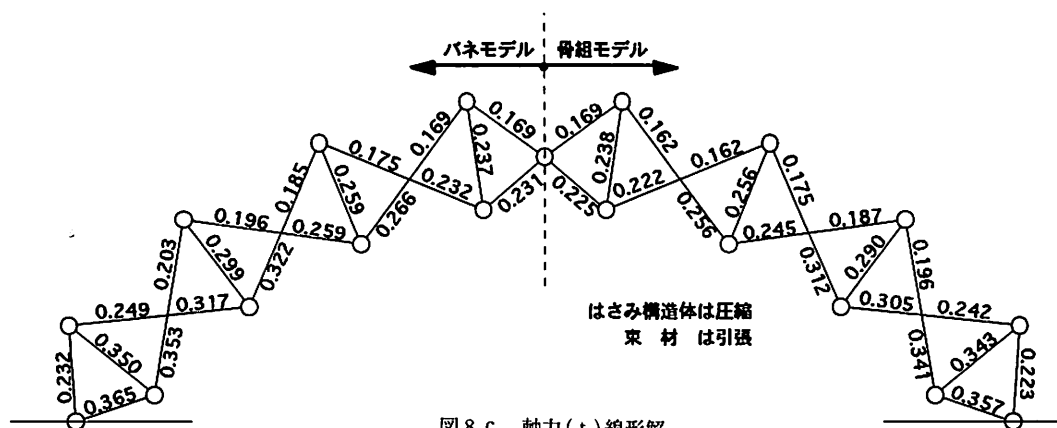


図 8 c. 軸力 (t) 線形解

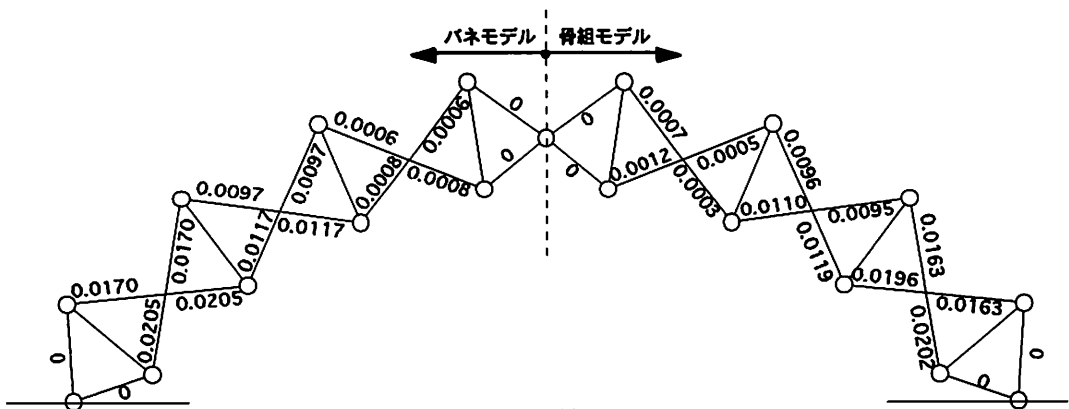


図 8 d. セン断力(t)線形解

位が生ずるセンター・ヒンジ点では、 $\delta$ バネ=0.43239cm、 $\delta$ 骨=0.43351cmで両者はほぼ完全に一致している。図・8cは各部材の軸力を示したもので、センターから支持点に向かって軸力は大きくなり、全体の性状は両者、定量的にも良い対応を見せている。最大軸力で比較すると、束材でNバネ/N骨=0.3499 t / 0.3434 t = 1.019、はさみ構造体部材でNバネ/N骨=0.3653 t / 0.3570 t = 1.023となり、その差は極めて小さい。図・8dははさみ構造体のせん断力の結果を示したもので、値は小さく、軸力に対して2次の応力となっており、このことは通常のアーチの力学性状からも容易に推察できる。以上より、バネモデルによる解析結果は、線形範囲で、精密解でも言うべき骨組モデルの解析結果と極めて良く対応し、本バネモデル解析法がケーブル式はさみ・アーチの実用的解析法として充分有効なことが示された。

## 5. おわりに

ケーブル式はさみ・アーチの幾何学的非線形静解析法を骨組モデルとバネモデルの場合について示し、ある特定な構造モデルに対して数値解析を実施し、両者の比較検討を行った。その結果、本バネモデル解析結果は骨組モデルのそれを極めて良い精度で近似し、本バネモデル解析法がケーブル式はさみ・アーチの実用的解析法として、有効なことが示せた。今後は、パラメータ解析を進め、その適用範囲を明らかにすることが肝要と思われる。

謝辞：本研究の遂行に際し、1993年度北海道東海大学教育研究基金の補助を受けた。ここに謝意を表します。

## 参考文献

1. 粉川牧, 渡辺宏二: ケーブル式はさみ・アーチの研究 その1・基本アイデアの縮尺モデルによる検討, 北海道東海大学芸術工学部紀要 第14号, 1-13.
2. FELIX ESCRIG, JUAN P. VALCARCEL: ANALYSIS OF EXPANDABLE SPACE BAR STRUCTURES. SHELLS, MEMBRANES AND SPACE FRAMES, PROCEEDINGS IASS SYMPOSIUM, OSAKA, 1986, VOL. 3, 269-276

3. JEROME J. CONNOR, JR. ROBERT, P. LOCHER, SHING-CHING CHAN: NONLINEAR ANALYSIS OF ELASTIC FRAMED STRUCTURES. PROCEEDINGS OF A. S. C. E., VOL. 94 ST6, JUNE 1968,1525-1547
4. 堀井, 斉藤, 川原, 森: 骨組構造の大変形解析, 土木学会論文報告集, VOL. 7, 1971
5. 藤本盛久: 新訂・建築学大系12座屈論 座屈たわみ角法による不規則ラーメンの座屈荷重計算法 基本公式の誘導, PP307-310. 彰国社, 昭和43年