

## 任意母線縁境界をもつ円筒網目シェル屋根の全体座屈解析

## その1 一様外圧下における非線形基礎式の数値解析法

正 会 員 粉 川 牧\*

## §1 序

網目シェル屋根の座屈は、(1) 部材の座屈 (Member Buckling), (2) 局部座屈 (Local Buckling), (3) 全体座屈 (General Buckling) の三つに分類される<sup>1), 2)</sup>。H型、円管断面等をもつ単一材によって大スパンを覆う単層剛接合網目シェル屋根は面外曲げ剛性が非常に小さく、上記(3)の全体座屈に対する検討が重要である。しかし、円筒網目シェル屋根の全体座屈に関しては、まだ理論的、実験的に解明されていない点が多い<sup>3)</sup>。

円筒網目シェル屋根の全体座屈性状は、(1) 網目パラメータ、(2) 周辺支持条件、(3) シェル形状パラメータ、(4) 荷重条件によって大きく相違する。本研究はこれらの項目に対応して、(1) 三角形網目が斜材と母線方向部材によって構成され(巨視的にとらえると、母線方向と円弧方向に関して直交異方性を有する)、(2) 妻側でローラー、母線縁で種々の支持条件をもち、さらに(3) 広範な円弧形状、スパン比について、(4) 法線方向荷重下に於ける全体座屈性状を、連続体置換に基づいた理論的解析によって解明しようとするものである。

さて、網目の組み方が特に等方性(斜材と母線方向部材ともに同一部材を使用し且つ正三角形に組む)の場合、連続体置換によって導かれる非線形基礎式は後述する様に Donnell 式に一致し、従って等方性円筒網目シェル屋根の全体座屈問題は等方性部分円筒殻のそれに等価である。等方性部分円筒殻の座屈については既にいくつかの研究が行われており、それを以下に述べる。A.S.C.E. 「Design of Cylindrical Concrete Shell Roofs」<sup>4)</sup>では、屋根型円筒殻の座屈検討式として、長形殻の場合、母線方向に一様軸圧縮力を受ける閉円筒殻の下限座屈値、短形殻の場合、一様外圧下に於ける座屈式を提案しているが、それらの理論的根拠は明らかでない。内山<sup>5)</sup>は妻側ローラー、母線縁辺固定且つ一様外圧下の座屈実験結果に基づいて、屋根型円筒殻の面内力に関する複合座屈限界応力は、閉円筒殻に一様軸圧及一様外圧が作用した場合の各々の下限座屈値を結ぶ直線式で表わすと安全側の結果を与えることを示し、さらに荷重と面内力が線形であると仮定して概略座屈荷重の推定法を示し

た。津下<sup>6)</sup>、Capurso<sup>7)</sup>は、妻側ローラー、母線縁辺フリーの場合、座屈前には膜理論が成立すると仮定し、線形固有値問題をエネルギー法によって解き、座屈解析を行った。内山、津下、Capursoの研究は座屈前に於ける形状変化を考慮しておらず、又曲げ応力の影響を無視しているが、これらの仮定はその後の幾何学的非線形理論に基づいた数値解析的研究によって必要とされなくなった。Turula<sup>8)</sup>、松井<sup>9)</sup>は妻側ローラー、母線縁フリーの場合について、前者は Donnell 式を差分法、後者は F.E.M. によって数値解析を行っているが、いずれも分割数が少ない為計算精度に疑問があり、又解析例も少なく、充分に解明されていない。横尾、中村<sup>10)</sup>は周辺固定境界の場合について、Donnell 式を差分法によって綿密な数値解析を行い、数個のモデルではあるが実験値との良好な一致を示した。以上の様に部分円筒の幾何学的非線形解析は等方性の場合でも極めて解析例が少なく、理論的にほとんど解明されていない。これは一つに非線形基礎式の数値解析が困難であることによると思われる。

本研究では、網目の直交異方性を考慮し、円筒網目シェル屋根の幾何学的非線形解析を行う。偏平推動殻及部分円筒殻の幾何学的非線形数値解析法として代表的なものに、Rayleigh-Ritz 法<sup>11), 12)</sup>、Galerkin 法<sup>13)</sup>、F.E.M.<sup>9), 14)</sup>、差分法<sup>10), 15)</sup>がある。Rayleigh-Ritz 法、Galerkin 法は与えられた境界条件を満足する適切な変位関数を選ぶことにより、比較的少ない自由度数でも高い計算精度を得ることが出来るが、実際には、境界条件を満足する関数形を見い出すことが困難で極めて限られた境界条件の場合にのみ適用可能である。一方、F.E.M.、差分法は、これとは対照的に境界条件が任意であっても数値計算ができる反面、精度のよい計算結果を得る為には要素分割数を増す必要があり、結局計算機の演算時間が長くなってしまふ。従って、本研究の如く、広範な解析パラメータのもとで非線形基礎式の数値解析を行う為には、前述の諸方法を単純に適用する訳にはゆかず、何らかの工夫が必要である。

論文(その1)では、研究の端緒として副題に示す様に、有限変形を考慮した曲線梁の連続体置換により非線形基礎式を導くと共にその数値解析法を対称大変形解析及中央母線に関する逆対称分岐座屈解析の場合について

\* 東京都立大学 大学院生  
(昭和53年8月31日 日本橋受理・時効期限昭和54年9月末日)

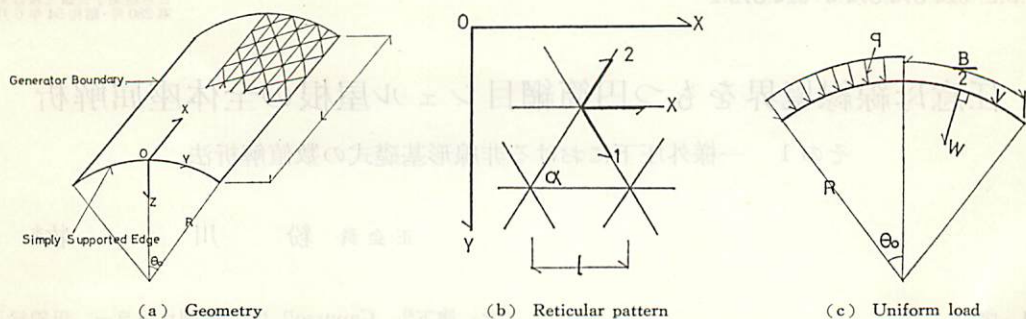


Fig. 1 Cylindrical reticulated shell roof without imperfection

示し、解析例題を通して本解析手法が母線縁任意境界のもとに非線形基礎式を比較的少ない自由度で精度よく数値計算できることを示す。

## § 2 非線形基礎式

解析の対象となる円筒網目シェル屋根を Fig. 1 に示す。既にこの種の構造の連続体置換に基づいた線形基礎式が尾崎<sup>14)</sup>により得られているが、ここでは全体座屈性状の理論的解明の為に、考え方をさらに拡張し有限変形を考慮した非線形基礎式を導く。

### 1. 仮 定

次の仮定のもとに非線形基礎式を導く。

① 円筒曲面上を覆う網目形状の展開平面は Fig. 1 (b) に示され、且つ一単位網目スケールは構造全体のそれに比し小さいものとする。

② 斜材、母線方向部材は各々一定断面とし、さらに①の仮定より連続化（平均化）して扱う。

③ 部材の歪エネルギーは軸歪エネルギー及円筒曲面接平面内にある軸に関する曲げ歪エネルギーについて評価し、他の歪エネルギーは無視する。

④ 軸歪は円筒面に対し法線方向変位： $w$ の微分に関してのみ2次の非線形項を採用する。曲げ歪は平面保持の仮定が成立する。

⑤ 部材の歪と応力の間には Hooke's Law が成立する。

⑥ 荷重は法線方向に作用し、分布は一様とする。(Fig. 1 (c)).

⑦ 初期曲面不整はない。

### 2. 記 号

本論文で使用する主な記号とその内容を以下に一覧する。

$R$ : 円筒面曲率半径,  $\theta_0$ : 半開角,  $B$ : 円弧長 ( $=2R\theta_0$ ),  $L$ : 母線方向スパン長,  $\alpha$ : 斜材と母線方向部材の成す角度 (一定),  $R_1$ : 斜材の曲率半径 ( $=R/\sin^2 \alpha$ ),  $\bar{A}$ ,  $\bar{A}_x$ : 斜材, 母線方向部材の単位幅当りの断面積 (一定),  $\bar{I}$ ,  $\bar{I}_x$ : 斜材, 母線方向部材の単位幅当りの断面二次モーメント (一定),  $i$ : 斜材の断面二次半径,  $E$ : 部材のヤング係数,  $r$ ,  $\zeta$ : 斜材に対する母線方向部材の軸

剛性比 ( $\bar{A}_x/2\bar{A}$ ), 曲げ剛性比 ( $\bar{I}_x/2\bar{I}$ ),  $t_h$ : 等価板厚 ( $=\sqrt{\frac{32}{3r}} \cdot i \cdot \sin^2 \alpha$ ),  $E_h$ : 等価ヤング係数 ( $=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \cdot \sqrt{r} \cdot r \cdot \frac{\bar{A}}{i \sin^2 \alpha} E$ ),  $\mu_h$ : 等価形状パラメータ ( $=\frac{B^2}{R t_h}$ ),  $\beta$ : 辺長比 ( $=\frac{B}{L}$ ),  $u, v, w$ : 母線, 円弧, 法線方向変位,  $U=\frac{u}{L}$ ,  $V=\frac{v}{B}$ ,  $W=\frac{w}{t_h}$ : 無次元変位,  $\varphi$ : 応力関数,  $F$ : 無次元応力関数 ( $=\frac{\varphi}{E_h t_h^3}$ ),  $q$ : 法線方向一様荷重,  $A$ : 無次元荷重 ( $=\frac{q}{E_h} \left(\frac{B}{t_h}\right)^4$ ),  $A_{crS}$ : 対称座屈値,  $A_{crB}$ : 中央母線に関する逆対称分岐座屈値,  $\varepsilon_N, \varepsilon_B$ : 中立軸歪度, 曲げ歪度, 垂直歪度 ( $=\varepsilon_N + \varepsilon_B$ ),  $N, M$ : 単位幅当りの軸力, 曲げモーメント,  $\Pi$ : 全ポテンシャル・エネルギー, 添字 1, 2,  $x$ : 部材番号 (Fig. 1 (b) 参照)

### 3. 基礎式の誘導

#### a. 歪一変位式

まず、母線方向と一定角度  $\alpha$  を成す部材すなわち斜材 1 の中立軸歪度:  $\varepsilon_{N1}$  を変位で表わす。斜材 1 の微小要素  $\widehat{AB}$  を取り出して変形前と変形後を Fig. 2 に示す。ここに  $R_1$  は斜材 1 の曲率半径で Euler の定理より  $R_1 = \frac{R}{\sin^2 \alpha}$  で与えられる。Fig. 2 を参照し、 $d\theta_1 \rightarrow 0$  とすると、 $\overline{ds}_1 = R_1 d\theta_1$ ,  $\overline{ds}_1' = \sqrt{(R_1 + D_1 - w)^2 + (D_1 + w)^2} d\theta_1$ , ここに、 $D_1$ : 斜材 1 の軸方向変位,  $\circ = \frac{d}{d\theta_1} = R_1 \frac{d}{ds_1}$  従って、

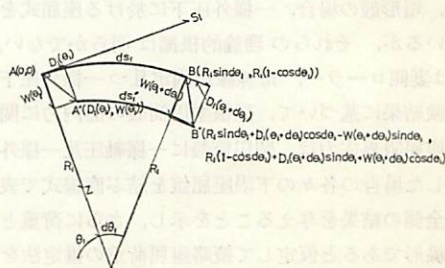


Fig. 2 Displacement of A curved diagonal beam element

$$\epsilon_{N_1} = \frac{d\bar{S}_1' - d\bar{S}_1}{d\bar{S}_1}$$

$$= \sqrt{\left(1 + D_1^4 - \frac{w}{R_1}\right)^2 + \left(\frac{D_1}{R_1} + w^d\right)^2} - 1 \dots (1)$$

式 (1) を第 3 項迄 Taylor 展開すると

$$\epsilon_{N_1} = \left(D_1^4 - \frac{w}{R_1}\right) + \frac{1}{2} \left(D_1^4 - \frac{w}{R_1}\right)^2$$

$$+ \frac{1}{2} \left(\frac{D_1}{R_1} + w^d\right)^2 - \frac{1}{8} \left\{ 2 \left(D_1^4 - \frac{w}{R_1}\right) \right.$$

$$\left. + \left(D_1^4 - \frac{w}{R_1}\right)^2 + \left(\frac{D_1}{R_1} + w^d\right)^2 \right\} \dots \dots (2)$$

式 (2) で  $\left(D_1^4 - \frac{w}{R_1}\right)$ ,  $\left(\frac{D_1}{R_1} + w^d\right)$  に関する三次以上の項を微小として無視すると,  $\epsilon_{N_1}$  は式 (3) で表わされる。ここで  $\left(D_1^4 - \frac{w}{R_1}\right)^2$  項は微小仮定を設けなくとも消失する。

$$\epsilon_{N_1} = \left(D_1^4 - \frac{w}{R_1}\right) + \frac{1}{2} \left(\frac{D_1}{R_1} + w^d\right)^2 \dots (3) \text{ (注 1)}$$

さらに,  $\frac{D_1}{R_1} \ll w^d$  (注 2) とすると, 結局,

$$\epsilon_{N_1} = D_1^4 - \frac{w}{R_1} + \frac{1}{2} (w^d)^2 \dots \dots \dots (4)$$

となり, 式 (4) は Schreyer<sup>17)</sup> が偏平アーチの幾何学的非線形解析で用いた軸歪一変位式と一致する。曲げ歪度:  $\epsilon_{B_1} = -t_1 w^d$  ( $t_1$  は円筒接平面からの仮想距離) を加えると, 斜材 1 の垂直歪度:  $\epsilon_1$  は,

$$\epsilon_1 = \epsilon_{N_1} + \epsilon_{B_1} = D_1^4 - \frac{w}{R_1} + \frac{1}{2} (w^d)^2 - t_1 w^d$$

$$\dots \dots \dots (5)$$

Fig. 3 より,  $D_1 = u \cos \alpha + v \sin \alpha$ ,  $d = \cos \alpha \frac{\partial}{\partial x} + \sin \alpha \frac{\partial}{\partial y}$  を用いて,  $\epsilon_1$  を  $x$ - $y$  座標系にて表わすと,

$$\epsilon_1 = \cos^2 \alpha \left(u' + \frac{1}{2} w'^2\right) + \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cdot (u' + v' + w'w') + \sin^2 \alpha \left(v' - \frac{w}{R} + \frac{1}{2} w'^2\right)$$

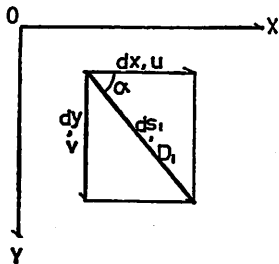


Fig. 3 Transformation of coordinate and displacement

(注 1) A.C. Walker<sup>18)</sup> は円形アーチの歪一変位式として, 円筒殻の有限変位理論の歪一変位<sup>19)</sup>に基づいた後,  $(D_1^4 - w/R_1)^2$  項が微小  $\{(D_1^4 - w/R_1) \sim (D_1/R_1 + w^d)^2 \ll 1\}$  であると仮定し, 式 (3) を得ているが, この仮定は必要ない。

(注 2) 文献 19) によれば, 周方向波数が大のとき, この仮定が許される。

$$-t_1 (\cos^2 \alpha w'' + \sin 2 \alpha w' + \sin^2 \alpha w'') \dots (6)$$

ここに,  $' = \partial/\partial x$ ,  $'' = \partial/\partial y$ , 斜材 2, 母線方向部材の垂直歪度:  $\epsilon_z$ ,  $\epsilon_x$  は式 (6) にて,  $\alpha \rightarrow -\alpha$ , 0 を代入して得られる。

#### b. 全ポテンシャル・エネルギー

斜材 1 の単位幅, 単位長さの歪エネルギー:  $dV_1$  は式 (6) を用いて

$$dV_1 = \frac{E}{2} \int_A \epsilon_1^2 d\bar{A} = \frac{E}{2} \left[ \bar{A} \left\{ \cos^2 \alpha \left(u' + \frac{1}{2} w'^2\right) \right. \right.$$

$$+ \sin \alpha \cos \alpha (u' + v' + w'w')$$

$$+ \sin^2 \alpha \left(v' - \frac{w}{R} + \frac{1}{2} w'^2\right) \left. \right\}^2$$

$$+ \bar{I} (\cos^2 \alpha w'' + \sin 2 \alpha w' + \sin^2 \alpha w'')^2 \left. \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left( \frac{N_1^2}{E\bar{A}} + \frac{M_1^2}{E\bar{I}} \right) \dots \dots \dots (7)$$

( $\because \int_A d\bar{A} = \bar{A}$ ,  $\int_A t_1 d\bar{A} = 0$ ,  $\int_A t_1^2 d\bar{A} = \bar{I}$ ),  $N_1$ ,  $M_1$  は単位幅当りの軸力, 曲げモーメントを示し, 次式で表わせる。

$$N_1 = E\bar{A} \left\{ \cos^2 \alpha \left(v' + \frac{1}{2} w'^2\right) + \sin \alpha \cos \alpha \right.$$

$$\cdot (u' + v' + w'w') + \sin^2 \alpha \left(v' - \frac{w}{R} + \frac{1}{2} w'^2\right) \left. \right\}$$

$$M_1 = -E\bar{I} (\cos^2 \alpha w'' + \sin 2 \alpha w' + \sin^2 \alpha w'')$$

$$\dots \dots \dots (8)$$

斜材 2, 母線方向部材のときは  $\alpha \rightarrow -\alpha$ , 0 とおいて求まる。さて外力ポテンシャル:  $dT$  は荷重が円筒曲面法線方向に作用すると仮定しているから,

$$dT = qw \dots \dots \dots (9)$$

#### c. 基礎式及部材力, 変位

式 (7)~(9) を用いて系の全ポテンシャル・エネルギー:

$$II = \int_{-B/2}^{B/2} \int_0^L (dV_1 + dV_2 + dV_x - dT) dx dy$$

$$\dots \dots \dots (10)$$

を組み立て,  $II$  の停留条件より  $x, y, z$  方向の釣合式を得る。

$$x \text{ 方向: } \{(N_1 + N_2) \cos^2 \alpha + N_x\}' + (N_1 - N_2) \cdot$$

$$\cdot \sin \alpha \cos \alpha = 0 \dots \dots \dots (11. a)$$

$$y \text{ 方向: } (N_1 - N_2)' \sin \alpha \cos \alpha + (N_1 + N_2) \cdot \sin^2 \alpha = 0$$

$$\dots \dots \dots (11. b)$$

$$z \text{ 方向: } 2E\bar{I} \sin^4 \alpha \{w'''' + 6 \cot^2 \alpha w'''' +$$

$$+ (\cot^4 \alpha + \frac{\zeta}{\sin^4 \alpha}) w''''\}$$

$$= \frac{1}{R_1} (N_1 + N_2) \sin^2 \alpha + q + [w'' \{(N_1 + N_2)$$

$$\cdot \cos^2 \alpha + N_x\} + w'' (N_1 + N_2) \sin^2 \alpha + 2w''$$

$$(N_1 - N_2) \sin \alpha \cos \alpha] \dots \dots \dots (11. c)$$

各部材の軸力  $N_1$ ,  $N_2$ ,  $N_x$  は式 (8) で示される様に,  $u, v, w$  によって表わされているから 釣合式 (11) も結



局  $u, v, w$  で表わすことができる。しかし変位表示による方程式を用いると妻側ローラー条件を満足する  $u, v, w$  の変位関数形を見出すことが極めて困難となるので、代りに本研究では変位  $u, v$  の連続性を仮定し応力関数  $\varphi$  と  $w$  による方程式を採用する。

$$\left. \begin{aligned} (N_1 + N_2) \cos^2 \alpha + N_x &= \varphi'' \\ (N_1 - N_2) \sin \alpha \cos \alpha &= -\varphi' \\ (N_1 + N_2) \sin^2 \alpha &= \varphi'' \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (12)$$

とおくと  $\varphi$  は式 (11・a, b) を満足する。式 (8), (12) より  $u, v$  を消去すると次の適合条件式を得る。

$$\begin{aligned} \frac{1}{2E\bar{A}r} \left\{ \varphi'''' + \left( \frac{r}{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} - 2 \cot^2 \alpha \right) \varphi'' \right. \\ \left. + \left( \cot^4 \alpha + \frac{r}{\sin^4 \alpha} \right) \varphi'''' \right\} \\ = -\frac{w''}{R} + w''^2 - w''w' \dots\dots\dots (13) \end{aligned}$$

一方、法線方向釣合式は、

$$\begin{aligned} 2E\bar{I} \sin^4 \alpha \left\{ w'''' + 6 \cot^2 \alpha w'' \right. \\ \left. + \left( \cot^4 \alpha + \frac{\zeta}{\sin^4 \alpha} \right) w'''' \right\} \\ = \frac{\varphi''}{R} + q + w''\varphi'' + w'\varphi' - 2w'\varphi' \dots\dots (14) \end{aligned}$$

式 (13), (14) で  $r = \bar{A}_x / 2\bar{A}$ ,  $\zeta = \bar{I}_x / 2\bar{I}$  は各々、斜材と母線方向部材の軸、曲げ剛性比を表わす。等価ヤング係数  $E_h = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \sqrt{r} \frac{\bar{A}}{i \sin^2 \alpha} E$ , 等価板厚  $t_h = \sqrt{\frac{32}{3r}} i \sin^2 \alpha$  を導入すると、

$$\begin{aligned} \frac{1}{E_h t_h} \left\{ \varphi'''' + \left( \frac{r}{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} - 2 \cot^2 \alpha \right) \varphi'' \right. \\ \left. + \left( \cot^4 \alpha + \frac{r}{\sin^4 \alpha} \right) \varphi'''' \right\} \\ = -\frac{w''}{R} + w''^2 - w''w' \dots\dots\dots (15) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{3}{32} E_h t_h^3 \left\{ w'''' + 6 \cot^2 \alpha w'' \right. \\ \left. + \left( \cot^4 \alpha + \frac{\zeta}{\sin^4 \alpha} \right) w'''' \right\} \\ = \frac{\varphi''}{R} + q + w''\varphi'' + w'\varphi' - 2w'\varphi' \dots\dots (16) \end{aligned}$$

式 (15), (16) は  $r = \zeta = 0.5$ ,  $\alpha = 60^\circ$  (斜材, 母線方向部材を同一部材とし且つ正三角形に組む) とすると、

$$\begin{aligned} \frac{1}{E_h t_h} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)^2 \varphi = \frac{1}{E_h t_h} d^2 \varphi \\ = -\frac{w''}{R} + w''^2 - w''w' \dots\dots\dots (17) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{3}{32} E_h t_h^3 d^2 w = \frac{\varphi''}{R} + q + w''\varphi'' + w'\varphi' \\ - 2w'\varphi' \dots\dots\dots (18) \end{aligned}$$

となり、このとき丁度ポアソン比 1/3 の等方性円筒殻の基礎式である Donnell 式に一致する。又、 $E_h = \sqrt{3}/6 \cdot \bar{A}/i \cdot E$ ,  $t_h = 2\sqrt{3}i$  より網目シェルは比較的ヤング係数

が小さく、板が厚い連続体シェルと力学的に等価であることが分る<sup>1)</sup>。

$F = \varphi/E_h t_h^3$ ,  $W = w/t_h$ ,  $\mu_h = B^2/Rt_h$ ,  $A = q/E_h(B/t_h)^4$ ,  $\beta = B/L$ ,  $X = x/L$ ,  $Y = y/B$ , さらに偏微分記号  $'$ ,  $\cdot$  を再び定義し直し,  $' = \partial/\partial X$ ,  $\cdot = \partial/\partial Y$  とおくと、式 (17), (18) は無次元化され式 (19), (20) を得る。

$$\begin{aligned} F'''' + \left( \frac{r}{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} - 2 \cot^2 \alpha \right) \beta^2 F'' \\ + \left( \cot^4 \alpha + \frac{r}{\sin^4 \alpha} \right) \beta^4 F'''' \\ = -\mu_h \beta^2 W'' + \beta^2 (W''^2 - W''W') \dots\dots (19) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{3}{32} \left\{ W'''' + 6 \cot^2 \alpha \beta^2 W'' \right. \\ \left. + \left( \cot^4 \alpha + \frac{\zeta}{\sin^4 \alpha} \right) \beta^4 W'''' \right\} \\ = \mu_h \beta^2 F'' + A + \beta^2 (W''F'' + W'F') \\ - 2W'F' \dots\dots\dots (20) \end{aligned}$$

式 (19), (20) が本論文で用いる円筒網目シェル屋根の非線形基礎式である。尚、各方向部材の断面力,  $U, V$  は  $F, W$  によって次の様に表わされる。

$$\begin{aligned} N_1 = \frac{E_h t_h^3}{2B^2} \left( \frac{\beta^2}{\sin^2 \alpha} F'' + \frac{\beta}{\cos \alpha \sin \alpha} F' \right) \\ N_x = \frac{E_h t_h^3}{B^2} (-\cot^2 \alpha \beta^2 F'' + F') \end{aligned} \dots\dots\dots (21)$$

$$\begin{aligned} M_1 = -\frac{3E_h t_h^4}{64B^2 \sin^4 \alpha} (\beta^2 \cos^2 \alpha W'' \\ \pm \beta \sin 2\alpha W' + \sin^2 \alpha W') \\ M_x = -\frac{3E_h t_h^4}{32B^2 \sin^4 \alpha} \beta^2 W'' \end{aligned} \dots\dots\dots (22)$$

$$\begin{aligned} U' = \frac{t_h^2}{B^2} \left( F'' - \cot^2 \alpha \beta^2 F'' - \frac{1}{2} \beta^2 W'^2 \right) \\ \text{但し } U = u/L \dots\dots\dots (23 \cdot a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V' = \frac{t_h^2}{B^2} \left\{ \left( \cot^4 \alpha + \frac{r}{\sin^4 \alpha} \right) \beta^2 F'' - \cot^2 \alpha F' \right. \\ \left. + \mu_h W - \frac{1}{2} W'^2 \right\} \text{ 但し } V = v/B \dots\dots (23 \cdot b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U + \beta^2 V' = -\frac{t_h^2}{B^2} \beta^2 \left( \frac{r}{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} F'' + W'W' \right) \\ \dots\dots\dots (23 \cdot c) \end{aligned}$$

### § 3 数値解析法

母線縁境界条件が円筒網目シェル屋根の幾何学的非線形挙動に著しい影響を及ぼすことは容易に推測でき、工学上極めて重要であるが、既往の研究でこの点に関する解明を試みたものは等方性網目の場合でさえも見当らない。§3 では、妻側ローラー、母線縁辺任意境界条件のもとで、網目の直交異方性を考慮した非線形基礎式 (19), (20) の数値解析法を対称大変形解析及び中央母線に関する逆対称分岐座屈解析の場合について示し、さらに 2, 3 の例題によって本解析法の妥当性を検討する。

#### 1. 円弧方向連立非線形常微分方程式

妻側はローラー支持と定めているから容易に母線方向の関数形を選ぶことが出来、まず非線形基礎式に Kantorovich 法を適用し、円弧方向連立非線形常微分方程式を得る。妻側ローラーの境界条件式は、

$$\begin{aligned} W &= (M_1 + M_2) \cos^2 \alpha + M_x \\ &= V = (N_1 + N_2) \cos^2 \alpha + N_x = 0 : \text{on } X=0, 1 \end{aligned} \quad (24)$$

ここに式 (24) の第 2 式:  $(M_1 + M_2) \cos^2 \alpha + M_x$  は妻側境界辺を回転軸とする単位幅に生ずる曲げモーメント、第 4 式:  $(N_1 + N_2) \cos^2 \alpha + N_x$  は妻側境界辺と直交する単位幅当りの面内力でおる。

式 (21), (22) より式 (24) は

$$W = W'' = F'' = F' = 0 : \text{on } X=0, 1 \quad (25)$$

となる。荷重分布は一様外圧、さらに中央円弧に関する逆対称分岐座屈を考慮しないとすれば  $W, F$  は共に中央円弧に関して対称関数となる。式 (25) を満足し且つ中央円弧に関する対称性を考慮し  $W, F$  を式 (26) で与える。

$$\begin{aligned} W &= \sum_{m=1,3,5}^{\infty} f_m(Y) \sin m\pi X \\ F &= \sum_{m=1,3,5}^{\infty} g_m(Y) \sin m\pi X \end{aligned} \quad (26)$$

ここに  $f_m(Y), g_m(Y)$  は円弧方向の未知変位、応力関数である。式 (26) を式 (19), (20) に代入し、Kantorovich 法を適用し、 $X$  について 0 から 1 迄の範囲で積分すると  $f_m(Y), g_m(Y)$  に関する連立非線形常微分方程式 (27), (28) を得る。

$$\begin{aligned} d_{1m} g_m &= \mu_h \beta^2 m^2 \pi^2 f_m + 2 \beta^2 \pi^2 \\ &\cdot \sum_{i=1,3,\dots}^{\infty} \sum_{j=1,3,\dots}^{\infty} (ij p_{ijm} f_i f_j + i^2 q_{ijm} f_i f_j'') \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} d_{2m} f_m &= -\mu_h \beta^2 m^2 \pi^2 g_m + \frac{4}{m\pi} \Lambda - 2 \beta^2 \pi^2 \\ &\cdot \sum_i \sum_j \{ (i^2 f_i g_j'' + j^2 f_i'' g_j) q_{ijm} + 2 ij p_{ijm} f_i g_j' \} \end{aligned} \quad (28)$$

ここに、

$$\begin{aligned} d_{1m} &= \dots - \beta^2 m^2 \pi^2 \left( \frac{r}{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} - 2 \cot^2 \alpha \right) \cdot \\ &\quad + \beta^4 m^4 \pi^4 \left( \cot^4 \alpha + \frac{r}{\sin^4 \alpha} \right) \\ d_{2m} &= \frac{3}{32} \left\{ \dots - 6 \cot^2 \alpha \beta^2 m^2 \pi^2 \cdot \right. \\ &\quad \left. + \beta^4 m^4 \pi^4 \left( \cot^4 \alpha + \frac{\zeta}{\sin^4 \alpha} \right) \right\} \\ p_{ijm} &= \int_0^1 \cos i\pi X \cos j\pi X \sin m\pi X dX \\ &= \frac{1}{2\pi} \left( \frac{1}{m+i+j} + \frac{1}{m-i-j} + \frac{1}{m+i-j} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{m+j-i} \right) \\ q_{ijm} &= \int_0^1 \sin i\pi X \sin j\pi X \sin m\pi X dX \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2\pi} \left( -\frac{1}{m+i+j} - \frac{1}{m-i-j} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{m+i-j} + \frac{1}{m+j-i} \right) \end{aligned} \quad (29)$$

さらに、対称大変形解析及中央母線に関する逆対称分岐座屈解析に用いる基礎式を式 (27), (28) より導く。

$$\begin{aligned} f_m &= f_{ms} + f_{ma} \\ g_m &= g_{ms} + g_{ma} \end{aligned} \quad (30)$$

ここに  $s, a$  は中央母線に関し対称、逆対称を意味する。式 (30) を式 (27), (28) に代入し、対称、逆対称成分に分離すると式 (31), (32) を得る。

$$\begin{aligned} \text{対称成分: } d_{1m} g_{ms} &= \mu_h \beta^2 m^2 \pi^2 f_{ms} + 2 \beta^2 \pi^2 \\ &\cdot \sum_i \sum_j \{ ij (f_{is} f_{js}' + f_{ia} f_{ja}') p_{ijm} \\ &\quad + i^2 (f_{is} f_{js}'' + f_{ia} f_{ja}'') q_{ijm} \} = \Phi_{ms}(Y) \end{aligned} \quad (31 \cdot a)$$

$$\begin{aligned} d_{2m} f_{ms} &= -\mu_h \beta^2 m^2 \pi^2 g_{ms} + \frac{4}{m\pi} \Lambda - 2 \beta^2 \pi^2 \\ &\cdot \sum_i \sum_j \{ (i^2 f_{is} g_{js}'' + f_{ia} g_{ja}'') q_{ijm} + j^2 (f_{is}'' g_{js} \\ &\quad + f_{ia}'' g_{ja}) q_{ijm} + 2 ij (f_{is} g_{js}' + f_{ia} g_{ja}') \\ &\quad \cdot p_{ijm} \} = \Psi_{ms}(Y) \end{aligned} \quad (31 \cdot b)$$

$$\begin{aligned} \text{逆対称成分: } d_{1m} g_{ma} &= \mu_h \beta^2 m^2 \pi^2 f_{ma} + 2 \beta^2 \pi^2 \\ &\cdot \sum_i \sum_j \{ 2 ij f_{is}' f_{ja}' p_{ijm} + (i^2 f_{is} f_{ja}'' \\ &\quad + j^2 f_{is}'' f_{ja}) q_{ijm} \} = \Phi_{ma}(Y) \end{aligned} \quad (32 \cdot a)$$

$$\begin{aligned} d_{2m} f_{ma} &= -\mu_h \beta^2 m^2 \pi^2 g_{ma} - 2 \beta^2 \pi^2 \\ &\cdot \sum_i \sum_j \{ (i^2 f_{is} g_{ja}'' + f_{ia} g_{js}'') q_{ijm} \\ &\quad + j^2 (f_{is}'' g_{ja} + f_{ia}'' g_{js}) p_{ijm} \} = \Psi_{ma}(Y) \end{aligned} \quad (32 \cdot b)$$

対称大変形解析に用いる基礎式は式 (31) で  $f_{ia} = g_{ja} = 0$  とおいて得られる。

$$\begin{aligned} d_{1m} g_{ms} &= \mu_h \beta^2 m^2 \pi^2 f_{ms} + 2 \beta^2 \pi^2 \\ &\cdot \sum_i \sum_j (ij f_{is}' f_{js}' p_{ijm} + i^2 f_{is} f_{js}'' q_{ijm}) \\ &= \Phi_{ms}(Y) \end{aligned} \quad (33 \cdot a)$$

$$\begin{aligned} d_{2m} f_{ms} &= -\mu_h \beta^2 m^2 \pi^2 g_{ms} + \frac{4}{m\pi} \Lambda - 2 \beta^2 \pi^2 \\ &\cdot \sum_i \sum_j \{ (i^2 f_{is} g_{js}'' + j^2 f_{is}'' g_{js}) q_{ijm} \\ &\quad + 2 ij f_{is}' g_{js}' p_{ijm} \} = \Psi_{ms}(Y) \end{aligned} \quad (33 \cdot b)$$

対称座屈点に達する前に中央母線に関する逆対称分岐座屈が先行する場合があります、このときの分岐座屈荷重及モードは  $f_{is}, g_{js}$  を既知とし式 (32) の  $f_{ia}, g_{ia}$  に関する固有値 (座屈) 方程式を解いて得られる。

## 2. 対称大変形解析

式 (33) を任意境界条件のもとで解く場合、境界条件毎に適切な関数形を見出すことは困難で、Galerkin 法を適用することは出来ない。そこで以下に示す方法により式 (33) の近似解を得る。式 (33) は  $f_{is}, g_{is} (i=1, 3, 5, \dots)$  に関する連立非線形方程式であるが、今式 (33) の右辺を強制項:  $\Phi_{ms}(Y), \Psi_{ms}(Y)$  として扱うとすれ



ば、これらの方程式は母線方向展開次数毎に分離され、恰も各々独立した  $g_{ms}$ ,  $f_{ms}$  に関する四階の線形常微分方程式と見做すことができる。とすれば解は余解:  $h$  と特解:  $p$  の線形和で表わすことができる。既に

$$\left. \begin{aligned} g_{ms} &= g_{msh} + g_{msp} \\ f_{ms} &= f_{msh} + f_{msp} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (34)$$

ここで余解及特解は次の様に求まる。

a. 余解表示

余解は  $g_{msh} = e^{\lambda Y}$ ,  $f_{msh} = e^{\xi Y}$  とおき  $A_{1m}g_{msh} = 0$ ,  $A_{2m}f_{msh} = 0$  に代入し  $\lambda$ ,  $\xi$  に関しては四次の特性方程式 (35), (36) より求まる。

$$\lambda^4 - \beta^2 m^2 \pi^2 \left( \frac{r}{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} - 2 \cot^2 \alpha \right) \lambda^2 + \beta^4 m^4 \pi^2 \left( \cot^4 \alpha + \frac{r}{\sin^4 \alpha} \right) = 0 \dots\dots\dots (35)$$

$$\xi^4 - \beta^2 m^2 \pi^2 6 \cot^2 \alpha \xi^2 + \beta^2 m^4 \pi^4 \cdot \left( \cot^4 \alpha + \frac{\zeta}{\sin^4 \alpha} \right) = 0 \dots\dots\dots (36)$$

式 (35), (36) の諸係数は  $\alpha$ ,  $r$ ,  $\zeta$  すなわち網目パラメータのみに関連しており、従って  $\alpha$ ,  $r$ ,  $\zeta$  の組合せに依って  $\lambda$ ,  $\xi$  の根の性質 (実根あるいは複素根) が変化し余関数形も変わる。ここでは網目パラメータに物理的意味をもたせ次の三通りについて余関数表示を行う。

1)  $8 \cos^4 \alpha > r, \zeta$  (Reticular Pattern I)

母線方向部材の軸剛性、曲げ剛性が斜材のそれに比し小さい場合である。

$$\left. \begin{aligned} g_{msh} &= C_{1ms} \sin \lambda_{2m} Y \operatorname{sh} \lambda_{1m} Y \\ &\quad + C_{2ms} \cos \lambda_{2m} Y \operatorname{ch} \lambda_{1m} Y \\ \lambda_{1m} &= \frac{\beta m \pi}{2 \sin \alpha} \sqrt{2 \sqrt{\cos^4 \alpha + r} \pm \left( 2 \cos^2 \alpha - \frac{r}{\cos^2 \alpha} \right)} \\ f_{msh} &= \sum_{p=1,2} D_{pms} \operatorname{ch} \xi_{pm} Y \\ \xi_{1m} &= \frac{\beta m \pi}{\sin \alpha} \sqrt{3 \cos^2 \alpha \pm \sqrt{8 \cos^4 \alpha - \zeta}} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (37)$$

但し、 $\operatorname{sh} \equiv \sinh$ ,  $\operatorname{ch} \equiv \cosh$

ここに  $C_{pms}$  ( $p=1, 2$ ),  $D_{pms}$  は未定乗数である。

2)  $8 \cos^4 \alpha < r, \zeta$  (Reticular Pattern II)

1) と逆の場合である。

$$\left. \begin{aligned} g_{msh} &= \sum_p C_{pms} \operatorname{ch} \lambda_{pm} Y \\ \lambda_{1m} &= \frac{\beta m \pi}{\sqrt{2 \sin \alpha}} \cdot \sqrt{\frac{r}{\cos^2 \alpha} - 2 \cos^2 \alpha \pm \sqrt{\frac{r^2}{\cos^4 \alpha} - 8r}} \\ f_{msh} &= D_{1ms} \sin \xi_{2m} Y \operatorname{sh} \xi_{1m} Y \\ &\quad + D_{2ms} \cos \xi_{2m} Y \operatorname{ch} \xi_{1m} Y \\ \xi_{1m} &= \frac{\beta m \pi}{\sqrt{2 \sin \alpha}} \sqrt{\sqrt{\cos^4 \alpha + r} \pm 3 \cos^2 \alpha} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (38)$$

3)  $8 \cos^4 \alpha = r, \zeta$  (準等方性網目)

このとき特性方程式 (35), (36) は共に重根をもち平板

解析にならない準等方性網目と名付ける。特に  $r = \zeta = 0.5$ ,  $\alpha = 60^\circ$  のときを等方性網目という。

$$\left[ \begin{aligned} g_{msh} \\ f_{msh} \end{aligned} \right] = \left[ \begin{aligned} C_{1ms} & C_{2ms} \\ D_{1ms} & D_{2ms} \end{aligned} \right] \left[ \begin{aligned} \operatorname{ch} \lambda_m Y \\ \lambda_m Y \operatorname{sh} \lambda_m Y \end{aligned} \right] \dots\dots\dots (39)$$

$$\lambda_m = \sqrt{3} \beta m \pi \cot \alpha$$

b. 特解表示

特解  $g_{msp}$ ,  $f_{msp}$  を領域  $|Y| \leq 1/2$  にて Fourier Co-sine 級数で展開する。即ち

$$\left. \begin{aligned} g_{msp} &= \sum_{k_s=0,2,4,\dots} S_{k_s m} \cos k_s \pi Y \\ f_{msp} &= \sum_{k_s} t_{k_s m} \cos k_s \pi Y \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (40)$$

強制項:  $\Phi_{ms}(Y)$ ,  $\Psi_{ms}(Y)$  も同様にして Fourier Co-sine 級数で展開すると、

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{ms} &= \sum_{k_s} \rho_{k_s m} \cos k_s \pi Y \\ \Psi_{ms} &= \sum_{k_s} \varepsilon_{k_s m} \cos k_s \pi Y \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (41)$$

ここで  $\rho_{k_s m}$ ,  $\varepsilon_{k_s m}$  は式 (42) より求まる。

$$(\rho_{k_s m}, \varepsilon_{k_s m}) = \left\{ \begin{aligned} &4 \int_0^{1/2} (\Phi_{ms}, \Psi_{ms}) \cos k_s \pi Y dY : k_s \geq 2 \\ &2 \int_0^{1/2} (\Phi_{ms}, \Psi_{ms}) dY : k_s = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (42)$$

$\Phi_{ms}$ ,  $\Psi_{ms}$  は三角関数と双曲線関数により表わされているから積分計算値  $\rho_{k_s m}$ ,  $\varepsilon_{k_s m}$  は解析的に示すことができる。式 (40), (41) を式 (33) に代入し係数比較を行うと、

$$\left. \begin{aligned} S_{k_s m} \pi^4 \left\{ k_s^4 + k_s^2 m^2 \beta^2 \left( \frac{r}{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} - 2 \cot^2 \alpha \right) \right. \\ \left. + m^4 \beta^4 \left( \cot^4 \alpha + \frac{r}{\sin^4 \alpha} \right) \right\} &= \rho_{k_s m} \\ t_{k_s m} \frac{3}{32} \pi^4 \left\{ k_s^4 + k_s^2 m^2 \beta^2 6 \cot^2 \alpha \right. \\ \left. + m^4 \beta^4 \left( \cot^4 \alpha + \frac{\zeta}{\sin^4 \alpha} \right) \right\} &= \varepsilon_{k_s m} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (43)$$

を得る。

c. 母線縁境界条件式

母線縁境界条件式は各部材の母線縁辺に働く部材力を考慮して導くことができる。本解析法によれば母線縁境界条件を任意に与えても解析可能であるが、ここでは具体的にピン、ローラー、フリーの境界条件式を示す。

1) ピン

$$W = (M_1 + M_2) \sin^2 \alpha = U = V = 0 : \text{on } Y = \frac{1}{2}$$

従って、

$$f_{ms} = f_{ms}'' = 0 : \text{on } Y = 1/2 \dots\dots\dots (44 \cdot a)$$

$$g_{ms}'' + \cot^2 \alpha \beta^2 m^2 \pi^2 g_{ms} = 0 : \text{on } Y = 1/2 \dots\dots\dots (44 \cdot b)$$

$$\begin{aligned} & - \left( \cot^4 \alpha + \frac{r}{\sin^4 \alpha} \right) \beta^2 m^2 \pi^2 \int_0^{1/2} g_{ms} dY \\ & - \cot^2 \alpha g_{ms} \cdot \left( \frac{1}{2} \right) + \mu_h \int_0^{1/2} f_{ms} dY \\ & - \sum_i \sum_j q_{ijm} \int_0^{1/2} f_{is} f_{js} dY = 0 \dots\dots\dots (44 \cdot c) \end{aligned}$$

2) ローラー

$$W = (M_1 + M_2) \sin^2 \alpha = U = (N_1 + N_2) \sin^2 \alpha = 0$$

: on  $Y=1/2$

従って

$$f_{ms} = f_{ms}'' = g_{ms} = g_{ms}'' = 0 : \text{on } Y=1/2 \dots (45)$$

3) フリー

$$(M_1 + M_2) \sin^2 \alpha = 2(M_1 - M_2)' \sin \alpha \cos \alpha$$

$$+ (M_1 + M_2) \sin^2 \alpha$$

$$= (N_1 + N_2) \sin^2 \alpha$$

$$= (N_1 - N_2) \sin \alpha \cos \alpha = 0 : \text{on } Y=1/2$$

より

$$\begin{aligned} f_{ms}'' - \cot^2 \alpha m^2 \pi^2 f_{ms} \\ = f_{ms}''' - 5 \cot^2 \alpha \beta^2 m^2 \pi^2 f_{ms}'' \\ = g_{ms} = g_{ms}' = 0 : \text{on } Y=1/2 \dots (46) \end{aligned}$$

d.  $8 \cos^4 \alpha = r, \zeta$  (準等方性網目) の場合の別解法

網目パラメータが  $8 \cos^4 \alpha = r, \zeta$  の場合、余関数型を式 (39) で与えてもよいが数値計算プログラムの簡便化を図る意味でここでは、この場合を Pattern I あるいは Pattern II の極限状態と見做し式 (37) あるいは式 (38) の余関数型を用いて解くことを考える。微小定数:  $\eta$  を導入し、式 (33-a, b) の両辺に各々  $\beta^2 m^2 \pi^2 \cdot 6 \cot^2 \alpha \cdot \eta g_{ms}''$ ,  $-3/32 \cdot \beta^2 m^2 \pi^2 6 \cot^2 \alpha \cdot \eta f_{ms}''$  を加えると、

$$\left. \begin{aligned} \square_{1m} g_{ms} &= \phi_{ms} + \beta^2 m^2 \pi^2 6 \cot^2 \alpha \eta g_{ms}'' \\ \square_{2m} f_{ms} &= \psi_{ms} - \frac{3}{32} \beta^2 m^2 \pi^2 6 \cot^2 \alpha \eta f_{ms}'' \end{aligned} \right\} \dots (47)$$

但し、

$$\square_{1m} = \dots - \beta^2 m^2 \pi^2 6 \cot^2 \alpha (1 - \eta) \dots + \beta^4 m^4 \pi^4 9 \cot^4 \alpha$$

$$\square_{2m} = \frac{3}{32} \{ \dots - \beta^2 m^2 \pi^2 6 \cot^2 \alpha (1 + \eta) \dots$$

$$\begin{aligned} f_{pqk, mij} &= 2 \beta^2 \pi^2 \{ (i j p_{ijm} - i^2 q_{ijm}) \xi_{pi} \xi_{qj} A(\xi_{pi}, \xi_{qj}, k_s \pi, 0) + k_s \pi i^2 q_{ijm} \xi_{qj} B(\xi_{qj}, \xi_{pi}, k_s \pi, 0) \} \\ &\quad + 2 \beta^2 \pi^2 q_{ijm} i^2 \text{ch} \left( \frac{\xi_{pi}}{2} \right) \xi_{qj} \text{sh} \left( \frac{\xi_{qj}}{2} \right) \cos \left( \frac{k_s \pi}{2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_{pl, k, mij} &= 2 \beta^2 \pi^2 [ m^2 q_{ijm} \xi_{pi} l_s \pi B(\xi_{pi}, 0, l_s \pi, k_s \pi) - k_s \pi q_{ijm} \{ i^2 l_s \pi E(\xi_{pi}, l_s \pi, k_s \pi, 0) \\ &\quad - j^2 \xi_{pi} B(\xi_{pi}, 0, k_s \pi, l_s \pi) \} ] + 2 \beta^2 \pi^2 q_{ijm} j^2 \xi_{pi} \text{sh} \left( \frac{\xi_{pi}}{2} \right) \cos \left( \frac{l_s \pi}{2} \right) \cos \left( \frac{k_s \pi}{2} \right) \end{aligned}$$

$$h_{l, n, k, mij} = 2 \beta^2 \pi^2 \{ (i j p_{ijm} - i^2 q_{ijm}) n_s l_s \pi^2 F(n_s, l_s, k_s) - k_s \pi j^2 q_{ijm} n_s \pi F(k_s, n_s, l_s) \}$$

$$y_{k, m} = \begin{cases} \mu_n \beta^2 m^2 \pi^2 \frac{1}{2} & : k_s = 0 \\ \mu_n \beta^2 m^2 \pi^2 \frac{1}{4} & : k_s \geq 2 \end{cases}$$

$$A(\alpha, \beta, r, \zeta) = \int_0^{1/2} \text{sh } \alpha Y \text{sh } \beta Y \cos r Y \cos \zeta Y dY$$

$$= \frac{1}{4} \sum_l \sum_n K_l \frac{(\alpha + K_l \beta) \cos \frac{(r + K_n \zeta)}{2} \text{sh} \frac{(\alpha + K_l \beta)}{2} + (r + K_n \zeta) \sin \frac{(r + K_n \zeta)}{2} \text{ch} \frac{(\alpha + K_l \beta)}{2}}{(\alpha + K_l \beta)^2 + (r + K_n \zeta)^2}$$

$$B(\alpha, \beta, r, \zeta) = \int_0^{1/2} \text{sh } \alpha Y \text{ch } \beta Y \sin r Y \cos \zeta Y dY$$

$$= \frac{1}{4} \sum_l \sum_n \frac{(\alpha + K_l \beta) \sin \frac{(r + K_n \zeta)}{2} \text{ch} \frac{(\alpha + K_l \beta)}{2} - (r + K_n \zeta) \cos \frac{(r + K_n \zeta)}{2} \text{sh} \frac{(\alpha + K_l \beta)}{2}}{(\alpha + K_l \beta)^2 + (r + K_n \zeta)^2}$$

$$+ \beta^4 m^4 \pi^4 9 \cot^4 \alpha \}$$

従って、 $\eta > 0$  のときは  $\square_{1m} g_{ms} = 0$  の特性根が相異なる複素根、 $\square_{2m} f_{ms} = 0$  のそれが相異なる実根を有するから Pattern I の余関数型を用いることができる。但し式 (37) に於いて、

$$\lambda_{1m} = \frac{\sqrt{6}}{2} \beta m \pi \cot \alpha \sqrt{2 - \eta}$$

$$\lambda_{2m} = \frac{\sqrt{6}}{2} \beta m \pi \cot \alpha \sqrt{\eta}$$

$$\xi_{1m} = \sqrt{3} \beta m \pi \cot \alpha \sqrt{1 + \eta \pm \sqrt{2\eta + \eta^2}}$$

である。 $\eta < 0$  のときは、 $\square_{1m} g_{ms} = 0$  の特性根が相異なる実根、 $\square_{2m} f_{ms} = 0$  のそれが相異なる複素根をもつから Pattern II の余関数型を用いることができる。

但し式 (38) に於いて

$$\lambda_{1m} = \sqrt{3} \beta m \pi \cot \alpha \sqrt{1 - \eta \pm \sqrt{-2\eta + \eta^2}}$$

$$\xi_{1m} = \frac{\sqrt{6}}{2} \beta m \pi \cot \alpha \sqrt{2 + \eta}$$

$$\xi_{2m} = \frac{\sqrt{6}}{2} \beta m \pi \cot \alpha \sqrt{-\eta}$$

である。

e. 特解の解析的表示 (Reticular Pattern I の場合)

式 (42) の  $\int_0^{1/2} \phi_{ms} \cos k_s \pi Y dY$ ,  $\int_0^{1/2} \psi_{ms} \cos k_s \pi Y dY$  は母線縁境界条件がピン、ローラー、フリーであることを考慮すると結局次の様になる。

$$\begin{aligned} \int_0^{1/2} \phi_{ms} \cos k_s \pi Y dY &= \sum_p v_{p, k, m} D_{p, m} + y_{k, m} t_{k, m} \\ &\quad + \sum_l \sum_j \sum_p \sum_q f_{pqk, mij} D_{p, i} D_{q, j} \\ &\quad + \sum_l \sum_j \sum_p \sum_q g_{pl, k, mij} l_{l, j} D_{p, i} \\ &\quad + \sum_{l_i, n_i} \sum_l \sum_j h_{l_i, n_i, k, mij} l_{l_i, j} t_{l_i, j} = \Phi_s(k_s, m) \dots (48) \end{aligned}$$

ここに、 $p, q = 1, 2, i, j, m = 1, 3, 5, \dots, l_s, n_s, k_s = 0, 2, 4, 6, \dots$ ,  $v_{p, k, m} = \mu_h \beta^2 m^2 \pi^2 I(\xi_{p, m}, 0, k_s \pi, 0)$ ,



$$\begin{aligned}
E(\alpha, \beta, \tau, \zeta) &= \int_0^{1/2} \text{ch } \alpha Y \sin \beta Y \sin \tau Y \cos \zeta Y dY \\
&= \frac{1}{4} \sum_l \sum_n (-K_l) \frac{\alpha \cos \frac{(\beta + K_l \tau + K_n \zeta)}{2} \text{sh } \frac{\alpha}{2} + (\beta + K_l \tau + K_n \zeta) \sin \frac{(\beta + K_l \tau + K_n \zeta)}{2} \text{ch } \frac{\alpha}{2}}{\alpha^2 + (\beta + K_l \tau + K_n \zeta)^2} \\
F(m_s, i_s, j_s) &= \int_0^{1/2} \sin m_s \pi Y \sin i_s \pi Y \cos j_s \pi Y dY \\
&= \frac{1}{8} \{ \delta(m_s - i_s - j_s) + \delta(m_s - i_s + j_s) - \delta(m_s + i_s - j_s) - \delta(m_s + i_s + j_s) \} \\
I(\alpha, \beta, \tau, \zeta) &= \int_0^{1/2} \text{ch } \alpha Y \text{ch } \beta Y \cos \tau Y \cos \zeta Y dY \\
&= \frac{1}{4} \sum_l \sum_n \frac{(\alpha + K_l \beta) \cos \frac{(\tau + K_n \zeta)}{2} \text{sh } \frac{(\alpha + K_l \beta)}{2} + (\tau + K_n \zeta) \sin \frac{(\tau + K_n \zeta)}{2} \text{ch } \frac{(\alpha + K_l \beta)}{2}}{(\alpha + K_l \beta)^2 + (\tau + K_n \zeta)^2}
\end{aligned}$$

$$\text{但し, } l, n=1, 2, K_1=1, K_2=-1, \delta(c)=\begin{cases} 1 & c=0 \\ 0 & c \neq 0 \end{cases}, m_s, i_s, j_s=0, 2, 4, \dots \quad (49)$$

式 (49) の \_\_ 項はフリーの場合に生ずる積分余剰項である。式 (48) に於いてローラー、ピンの場合  $\frac{\partial \Phi_s(k_s, m)}{\partial t_{l,j}}$   $= \frac{\partial \Phi_s(l_s, j)}{\partial t_{k,m}}$  が成立し、これは Newton-Raphson 法接線マトリックスの  $t_{k,m}$  に関する要素が対称であることを意味する。

$$\begin{aligned}
\int_0^{1/2} \Psi_{ms} \cos k_s \pi Y dY &= -\sum_p x_{pkm} C_{pms} - y_{k,m} S_{k,m} + \omega_{k,m} A + \sum_p \sum_q \sum_l \sum_j a_{pqk, mij} D_{pis} C_{qjs} \\
&\quad + \sum_p \sum_l \sum_i \sum_j (b_{pl, k, mij} S_{l, ij} D_{pis} + d_{pl, k, mij} t_{l, i} C_{pjs}) + \sum_l \sum_n \sum_i \sum_j e_{l, n, k, mij} t_{l, i} S_{n, j} \\
&= \Psi_s(k_s, m) \quad \dots \dots \dots (50)
\end{aligned}$$

ここに、

$$\begin{aligned}
x_{1k,m} &= \mu_h \beta^2 m^2 \pi^2 D(\lambda_{1m}, \lambda_{2m}, k_s \pi, 0) \\
x_{2k,m} &= \mu_h \beta^2 m^2 \pi^2 O(\lambda_{1m}, \lambda_{2m}, k_s \pi, 0) \\
a_{p1k, mij} &= 2 \beta^2 \pi^2 q_{ijm} [m^2 \xi_{pi} \{ \lambda_{2j} A(\xi_{pi}, \lambda_{1j}, \lambda_{2j}, k_s \pi) + \lambda_{1j} B(\xi_{pi}, \lambda_{1j}, \lambda_{2j}, k_s \pi) \} \\
&\quad - k_s \pi \{ (j^2 - i^2) \xi_{pi} G(\xi_{pi}, \lambda_{1j}, \lambda_{2j}, k_s \pi) - k_s \pi i^2 B(\lambda_{1j}, \xi_{pi}, \lambda_{2j}, k_s \pi) \} ] \\
&\quad - 2 \beta^2 \pi^2 q_{ijm} j^2 \cos \left( \frac{k_s \pi}{2} \right) \xi_{pi} \text{sh} \left( \frac{\xi_{pi}}{2} \right) \sin \left( \frac{\lambda_{2j}}{2} \right) \text{sh} \left( \frac{\lambda_{1j}}{2} \right) \\
a_{p2k, mij} &= 2 \beta^2 \pi^2 q_{ijm} [m^2 \xi_{pi} \{ -\lambda_{2j} B(\xi_{pi}, \lambda_{1j}, \lambda_{2j}, k_s \pi) + \lambda_{1j} A(\xi_{pi}, \lambda_{1j}, \lambda_{2j}, k_s \pi) \} \\
&\quad - k_s \pi \{ (j^2 - i^2) \xi_{pi} B(\xi_{pi}, \lambda_{1j}, k_s \pi, \lambda_{2j}) - k_s \pi i^2 I(\xi_{pi}, \lambda_{1j}, \lambda_{2j}, k_s \pi) \} ] \\
&\quad - 2 \beta^2 \pi^2 q_{ijm} j^2 \cos \left( \frac{k_s \pi}{2} \right) \xi_{pi} \text{sh} \left( \frac{\xi_{pi}}{2} \right) \cos \left( \frac{\lambda_{2j}}{2} \right) \text{ch} \left( \frac{\lambda_{1j}}{2} \right) \\
b_{p1, k, mij} &= 2 \beta^2 \pi^2 q_{ijm} [ -m^2 \xi_{pi} l_{s\pi} B(\xi_{pi}, 0, l_{s\pi}, k_s \pi) - k_s \pi \{ (j^2 - i^2) \xi_{pi} B(\xi_{pi}, 0, k_s \pi, l_{s\pi}) \\
&\quad - k_s \pi i^2 I(\xi_{pi}, 0, l_{s\pi}, k_s \pi) \} ] - 2 \beta^2 \pi^2 q_{ijm} j^2 \cos \left( \frac{k_s \pi}{2} \right) \xi_{pi} \text{sh} \left( \frac{\xi_{pi}}{2} \right) \cos \left( \frac{l_{s\pi}}{2} \right) \\
d_{1l, k, mij} &= 2 \beta^2 \pi^2 q_{ijm} [ -m^2 l_{s\pi} \{ \lambda_{2j} D(\lambda_{1j}, l_{s\pi}, \lambda_{2j}, k_s \pi) + \lambda_{1j} E(\lambda_{1j}, \lambda_{2j}, l_{s\pi}, k_s \pi) \} \\
&\quad + k_s \pi \{ (j^2 - i^2) l_{s\pi} H(\lambda_{1j}, \lambda_{2j}, k_s \pi, l_{s\pi}) + k_s \pi i^2 D(\lambda_{1j}, \lambda_{2j}, l_{s\pi}, k_s \pi) \} ] \\
d_{2l, k, mij} &= 2 \beta^2 \pi^2 q_{ijm} [ -m^2 l_{s\pi} \{ -\lambda_{2j} E(\lambda_{1j}, \lambda_{2j}, l_{s\pi}, k_s \pi) + \lambda_{1j} D(\lambda_{1j}, l_{s\pi}, \lambda_{2j}, k_s \pi) \} \\
&\quad + k_s \pi \{ (j^2 - i^2) l_{s\pi} E(\lambda_{1j}, k_s \pi, l_{s\pi}, \lambda_{2j}) + k_s \pi i^2 O(\lambda_{1j}, \lambda_{2j}, l_{s\pi}, k_s \pi) \} ] \\
e_{l, n, k, mij} &= 2 \beta^2 \pi^2 q_{ijm} [ m^2 l_{s\pi} n_s \pi^2 F(l_s, n_s, k_s) + k_s \pi \{ (j^2 - i^2) l_{s\pi} F(l_s, k_s, n_s) + k_s \pi i^2 K(l_s, n_s, k_s) \} ] \\
\omega_{k,m} &= \begin{cases} \frac{2}{m\pi} & : k_s = 0 \\ 0 & : k_s \geq 2 \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D(\alpha, \beta, \tau, \zeta) &= \int_0^{1/2} \text{sh } \alpha Y \sin \beta Y \cos \tau Y \cos \zeta Y dY \\
&= \frac{1}{4} \sum_l \sum_n \frac{\alpha \sin \frac{(\beta + K_l \tau + K_n \zeta)}{2} \text{ch } \frac{\alpha}{2} - (\beta + K_l \tau + K_n \zeta) \cos \frac{(\beta + K_l \tau + K_n \zeta)}{2} \text{sh } \frac{\alpha}{2}}{\alpha^2 + (\beta + K_l \tau + K_n \zeta)^2} \\
G(\alpha, \beta, \tau, \zeta) &= \int_0^{1/2} \text{sh } \alpha Y \text{sh } \beta Y \sin \tau Y \sin \zeta Y dY
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4} \sum_I \sum_n (-K_I K_n) \frac{(\alpha + K_I \beta) \cos \frac{(r + K_n \zeta)}{2} \operatorname{sh} \frac{(\alpha + K_I \beta)}{2} + (r + K_n \zeta) \sin \frac{(r + K_n \zeta)}{2} \operatorname{ch} \frac{(\alpha + K_I \beta)}{2}}{(\alpha + K_I \beta)^2 + (r + K_n \zeta)^2} \\
H(\alpha, \beta, r, \zeta) &= \int_0^{1/2} \operatorname{sh} \alpha Y \sin \beta Y \sin r Y \sin \zeta Y dY \\
&= \frac{1}{4} \sum_I \sum_n (-K_I K_n) \frac{\alpha \sin \frac{(\zeta + K_I \beta + K_n r)}{2} \operatorname{ch} \frac{\alpha}{2} - (\zeta + K_I \beta + K_n r) \cos \frac{(\zeta + K_I \beta + K_n r)}{2} \operatorname{sh} \frac{\alpha}{2}}{\alpha^2 + (\zeta + K_I \beta + K_n r)^2} \\
O(\alpha, \beta, r, \zeta) &= \int_0^{1/2} \operatorname{ch} \alpha Y \cos \beta Y \cos r Y \cos \zeta Y dY \\
&= \frac{1}{4} \sum_I \sum_n \frac{\alpha \cos \frac{(\beta + K_I r + K_n \zeta)}{2} \operatorname{sh} \frac{\alpha}{2} + (\beta + K_I r + K_n \zeta) \sin \frac{(\beta + K_I r + K_n \zeta)}{2} \operatorname{ch} \frac{\alpha}{2}}{\alpha^2 + (\beta + K_I r + K_n \zeta)^2} \\
K(m_s, i_s, j_s) &= \int_0^{1/2} \cos m_s \pi Y \cos i_s \pi Y \cos j_s \pi Y dY \\
&= \frac{1}{8} \{ \delta(m_s - i_s + j_s) + \delta(m_s + i_s - j_s) + \delta(m_s + i_s + j_s) + \delta(m_s - i_s - j_s) \}
\end{aligned} \tag{51}$$

ここで式 (51) の — 項はピンの場合にのみ生ずる積分余剰項である。式 (50) に於いてローラー、フリーの場合  $\frac{\partial \Psi_s(k_s, m)}{\partial S_{i,j}} = \frac{\partial \Psi_s(l_s, j)}{\partial S_{k,m}}$  が成立し、Newton-Raphson 法接線マトリックスの  $S_{k,m}$  に関する要素は対称となる。又、 $t_{k,m}$  に関する要素は境界条件に関係なく対称であることが同様に証明される。

f. 母線縁境界条件式 (Reticular Pattern I の場合)

1) ピン

式 (44) は次の様になる。

$$\left. \begin{aligned}
\sum_p D_{pms} \operatorname{ch} \left( \frac{\xi_{pm}}{2} \right) + \sum_{k_i} t_{k,m} \cos \left( \frac{k_s \pi}{2} \right) &= 0 \\
\sum_p D_{pms} \cdot \xi_{pm} \operatorname{ch} \left( \frac{\xi_{pm}}{2} \right) - \sum_{k_i} t_{k,m} k_s^2 \pi^2 \cos \left( \frac{k_s \pi}{2} \right) &= 0
\end{aligned} \right\} \tag{52. a}$$

$$\begin{aligned}
C_{1ms} &\left\{ (\lambda_{1m}^2 - \lambda_{2m}^2 + \cot^2 \alpha \beta^2 m^2 \pi^2) \sin \frac{\lambda_{2m}}{2} \right. \\
&\quad \cdot \operatorname{sh} \frac{\lambda_{1m}}{2} + 2 \lambda_{1m} \lambda_{2m} \cos \frac{\lambda_{2m}}{2} \operatorname{ch} \frac{\lambda_{1m}}{2} \Big\} + \\
C_{2ms} &\left\{ (\lambda_{1m}^2 - \lambda_{2m}^2 + \cot^2 \alpha \beta^2 m^2 \pi^2) \cos \frac{\lambda_{2m}}{2} \right. \\
&\quad \cdot \operatorname{ch} \frac{\lambda_{1m}}{2} - 2 \lambda_{1m} \lambda_{2m} \sin \frac{\lambda_{2m}}{2} \operatorname{sh} \frac{\lambda_{1m}}{2} \Big\} - \\
\sum_{k_i} S_{k,m} (k_s^2 \pi^2 - \cot^2 \alpha \beta^2 m^2 \pi^2) \cos \frac{k_s \pi}{2} &= 0
\end{aligned} \tag{52. b}$$

$$\begin{aligned}
C_{1ms} &\left\{ - \left( \cot^4 \alpha + \frac{r}{\sin^4 \alpha} \right) \beta^2 m^2 \pi^2 \right. \\
&\quad \cdot \frac{\lambda_{1m} \sin \frac{\lambda_{2m}}{2} \operatorname{ch} \frac{\lambda_{1m}}{2} - \lambda_{2m} \cos \frac{\lambda_{2m}}{2} \operatorname{sh} \frac{\lambda_{1m}}{2}}{\lambda_{1m}^2 + \lambda_{2m}^2} \\
&\quad - \cot^2 \alpha \left( \lambda_{2m} \cos \frac{\lambda_{2m}}{2} \operatorname{sh} \frac{\lambda_{1m}}{2} \right. \\
&\quad \left. \left. + \lambda_{1m} \sin \frac{\lambda_{2m}}{2} \operatorname{ch} \frac{\lambda_{1m}}{2} \right) \right\} + \\
C_{2ms} &\left\{ - \left( \cot^4 \alpha + \frac{r}{\sin^4 \alpha} \right) \beta^2 m^2 \pi^2 \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\cdot \frac{\lambda_{1m} \cos \frac{\lambda_{2m}}{2} \operatorname{sh} \frac{\lambda_{1m}}{2} + \lambda_{2m} \sin \frac{\lambda_{2m}}{2} \operatorname{ch} \frac{\lambda_{1m}}{2}}{\lambda_{1m}^2 + \lambda_{2m}^2} \\
&\quad - \cot^2 \alpha \left( -\lambda_{2m} \sin \frac{\lambda_{2m}}{2} \operatorname{ch} \frac{\lambda_{1m}}{2} + \lambda_{1m} \cos \frac{\lambda_{2m}}{2} \right. \\
&\quad \left. \cdot \operatorname{sh} \frac{\lambda_{1m}}{2} \right) \Big\} - S_{0m} \frac{1}{2} \left( \cot^4 \alpha + \frac{r}{\sin^4 \alpha} \right) \beta^2 m^2 \pi^2 + \\
&\quad \frac{\operatorname{sh} \frac{\xi_{pm}}{2}}{\xi_{pm}} - \sum_p \sum_q \sum_i \sum_j q_{ijm} \xi_{pi} \xi_{qj} \\
&\quad \cdot A(\xi_{pi}, \xi_{qj}, 0, 0) D_{pis} D_{qjs} + t_{0m} \frac{1}{2} \mu_h \\
&\quad + \sum_p \sum_i \sum_j q_{ijm} \xi_{pi} \xi_{js} \pi^2 B(\xi_{pi}, 0, \xi_{js}, 0) \\
&\quad \cdot t_{i,j} D_{pis} - \sum_i \sum_j \sum_l \frac{1}{4} l_s^2 \pi^2 q_{ijm} t_{i,j} t_{l,i} = 0
\end{aligned} \tag{52. c}$$

2) ローラー

$f_{ms} = f_{ms}'' = 0$  : on  $Y = 1/2$  は式 (52. a) となる。残りの境界条件式は

$$\begin{aligned}
C_{1ms} &\sin \frac{\lambda_{2m}}{2} \operatorname{sh} \frac{\lambda_{1m}}{2} + C_{2ms} \cos \frac{\lambda_{2m}}{2} \operatorname{ch} \frac{\lambda_{1m}}{2} \\
&\quad + \sum_{k_i} S_{k,m} \cos \frac{k_s \pi}{2} = 0 \\
C_{1ms} &\left\{ (\lambda_{1m}^2 - \lambda_{2m}^2) \sin \frac{\lambda_{2m}}{2} \operatorname{sh} \frac{\lambda_{1m}}{2} \right. \\
&\quad \left. + 2 \lambda_{1m} \lambda_{2m} \cos \frac{\lambda_{2m}}{2} \operatorname{ch} \frac{\lambda_{1m}}{2} \right\} + \\
C_{2ms} &\left\{ (\lambda_{1m}^2 - \lambda_{2m}^2) \cos \frac{\lambda_{2m}}{2} \operatorname{ch} \frac{\lambda_{1m}}{2} - 2 \lambda_{1m} \lambda_{2m} \right. \\
&\quad \left. \cdot \sin \frac{\lambda_{2m}}{2} \operatorname{sh} \frac{\lambda_{1m}}{2} \right\} - \sum_{k_i} S_{k,m} k_s^2 \pi^2 \cos \frac{k_s \pi}{2} = 0
\end{aligned} \tag{53}$$

3) フリー

式 (46) より

$$\begin{aligned}
&\sum_p D_{pms} (\xi_{pm}^2 - \cot^2 \alpha \beta^2 m^2 \pi^2) \operatorname{ch} \frac{\xi_{pm}}{2} \\
&\quad - \sum_{k_i} t_{k,m} (k_s^2 \pi^2 - \cot^2 \alpha \beta^2 m^2 \pi^2) \cos \left( \frac{k_s \pi}{2} \right) = 0
\end{aligned}$$

$$\sum_p D_{pms} (\xi_{pm}^3 - 5 \xi_{pm} \cot^2 \alpha \beta^2 m^2 \pi^2) \operatorname{sh} \frac{\xi_{pm}}{2} = 0$$

$$C_{1ms} \sin \frac{\lambda_{2m}}{2} \operatorname{sh} \frac{\lambda_{1m}}{2} + C_{2ms} \cos \frac{\lambda_{2m}}{2} \operatorname{ch} \frac{\lambda_{1m}}{2} + \sum_{k_s} S_{k_s m} \cos \left( \frac{k_s \pi}{2} \right) = 0$$

$$C_{1ms} \left( \lambda_{2m} \cos \frac{\lambda_{2m}}{2} \operatorname{sh} \frac{\lambda_{1m}}{2} + \lambda_{1m} \sin \frac{\lambda_{2m}}{2} \operatorname{ch} \frac{\lambda_{1m}}{2} \right) + C_{2ms} \left( -\lambda_{2m} \sin \frac{\lambda_{2m}}{2} \operatorname{ch} \frac{\lambda_{1m}}{2} + \lambda_{1m} \cos \frac{\lambda_{2m}}{2} \operatorname{sh} \frac{\lambda_{1m}}{2} \right) = 0 \quad (54)$$

g. 数値計算法

結局、非線形基礎式 (19), (20) は未定係数:  $C_{pms}$ ,  $D_{pms}$ ,  $t_{kam}$ ,  $S_{k_s m}$ ,  $A$  に関する連立代数方程式となり、これを適切な増分パラメータを選定し Newton-Raphson 法を適用して解き、対称座屈性状を明らかにすることができる。

### 3. 中央母線に関する逆対称分岐座屈解析

対称座屈点に達する前に中央母線に関する逆対称分岐座屈が発生する場合がある。本論文では分岐点後の解析は行わず、 $f_{ia}$ ,  $g_{ia}$  に関する固有値 (座屈) 方程式 (32) を解くことにより、分岐点荷重及モードを明らかにする。数値解析法は対称大変形解析で示した考え方を用いており、ここでは、その概略を示す。式 (32・a, b) の右边を強制項:  $\Phi_{ma}(Y)$ ,  $\Psi_{ma}(Y)$  と見做し、各々独立した  $g_{ma}$ ,  $f_{ma}$  に関する四階の線形常微分方程式の如く扱う。この様になると解は、

$$\left. \begin{aligned} g_{ma} &= g_{mah} + g_{map} \\ f_{ma} &= f_{mah} + f_{map} \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

とおくことができる。余解は例えば  $8 \cos^4 \alpha > r, \zeta$  の場合について示すと、式 (56) となる。

$$\left. \begin{aligned} g_{mah} &= C_{1ma} \cos \lambda_{2m} Y \operatorname{sh} \lambda_{1m} Y \\ &\quad + C_{2ma} \sin \lambda_{2m} Y \operatorname{ch} \lambda_{1m} Y \\ f_{mah} &= \sum_p D_{pma} \operatorname{sh} \xi_{pm} Y \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

特解は、まず  $g_{map}$ ,  $f_{map}$ ,  $\Phi_{ma}$ ,  $\Psi_{ma}$  を Fourier Sine 級数で展開する。

$$\left. \begin{aligned} g_{map} &= \sum_{k_a=2,4,6,\dots}^{\infty} S_{k_a m} \sin k_a \pi Y \\ f_{map} &= \sum_{k_a}^{\infty} t_{kam} \sin k_a \pi Y \end{aligned} \right\} \quad (57)$$

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{map} &= \sum_{k_a=2,4,6,\dots}^{\infty} \rho_{k_a m} \sin k_a \pi Y \\ \Psi_{map} &= \sum_{k_a}^{\infty} \varepsilon_{k_a m} \sin k_a \pi Y \end{aligned} \right\} \quad (58)$$

但し

$$(\rho_{k_a m}, \varepsilon_{k_a m}) = 4 \int_0^{1/2} (\Phi_{ma}, \Psi_{ma}) \sin k_a \pi Y dY \quad (59)$$

Fourier 係数:  $S_{k_a m}$  と  $\rho_{k_a m}$ ,  $t_{kam}$  と  $\varepsilon_{k_a m}$  の間には次の関係が成立する。

$$S_{k_a m} \pi^4 \left\{ k_a^4 + k_a^2 m^2 \beta^2 \left( \frac{r}{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} - 2 \cot^2 \alpha \right) \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} &+ m^4 \beta^4 \left( \cot^4 \alpha + \frac{r}{\sin^4 \alpha} \right) \right\} = \rho_{k_a m} \\ t_{kam} \frac{3}{32} \pi^4 \left\{ k_a^4 + k_a^2 m^2 \beta^2 6 \cot^2 \alpha + m^4 \beta^4 \right. \\ &\cdot \left. \left( \cot^4 \alpha + \frac{\zeta}{\sin^4 \alpha} \right) \right\} = \varepsilon_{k_a m} \end{aligned} \right\} \quad (60)$$

母線縁境界条件式は、例えばピンの場合について示すと、

$$f_{ma} = f_{ma}'' = 0 \quad : \text{on } Y = \frac{1}{2} \quad (61 \cdot a)$$

$$\therefore D_{pma} = 0$$

$$g_{ma}'' - \cot^2 \alpha \beta^2 m^2 \pi^2 g_{ma} = 0 \quad : \text{on } Y = \frac{1}{2} \quad (61 \cdot b)$$

$$\begin{aligned} & - \left( \cot^4 \alpha + \frac{r}{\sin^4 \alpha} \right) \beta^2 m^2 \pi^2 \int_0^{1/2} g_{ma} dY - \cot^2 \alpha \\ & \cdot \left\{ g_{ma}' \left( \frac{1}{2} \right) - g_{ma}'(0) \right\} + \mu_h \int_0^{1/2} f_{mah} dY \\ & + \frac{1}{\beta^2 m^2 \pi^2} \{ g_{ma}''(0) + \cot^2 \alpha \beta^2 m^2 \pi^2 g_{ma}'(0) \} \\ & - \frac{r}{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} g_{ma}'(0) = 0 \quad (61 \cdot c) \end{aligned}$$

(但し式 (61・c) は  $V=0$ : on  $Y=1/2$  の条件式で、ここで非線形項  $-2 \sum_i \sum_j q_{ijm} \int_0^{1/2} f_{is} f_{ja} dY$  は微小として無視している。)

式 (60), (61) は  $C_{pma}$ ,  $D_{pma}$ ,  $S_{k_a m}$ ,  $t_{kam}$  に関する同次方程式であって一般にこれらの値は零となるが  $C_{pms}$ ,  $D_{pms}$ ,  $S_{k_s m}$ ,  $t_{kam}$  がある値のとき、非自明な解が存在する。このときの  $A$  が分岐座屈値:  $A_{crB}$  であり解が分岐モードである。ここでは分岐座屈点を  $C_{pma}$ ,  $D_{pma}$ ,  $t_{kam}$ ,  $S_{k_a m}$  の係数マトリックス行列式の値が対称大変形解析各ステップ間で近似的に  $A$  と直線関係にあると仮定して求める。

### 4. 本数値解析法の検討

a.  $8 \cos^4 \alpha = r, \zeta$  (準等方性網目) の場合の別解法の妥当性について

2, d. で述べた方法により Reticular Pattern I あるいはIIの余関数型すなわち式 (37), (38) を用いて準等方性の問題を解析することができる。解析の一例として網目パラメータ:  $r=\zeta=0.5$ ,  $\alpha=60^\circ$ , シェル形状パラメータ:  $\mu_h=300$ ,  $\beta=1.0$ , 母線縁境界ローラーの場合の対称大変形数値計算結果を Table 1 (a) に示す。但し、計算項数は  $m=1, 3$  (2項),  $k_s=0, 2, 4, 6$  (4項) を採用し増分パラメータは平均変位:  $W_{AV} = \int_0^{1/2} \int_0^{1/2} W dX dY$  と

し (表中1ステップは  $4W_{AV}=0.05$  を意味する。) 又、微小定数:  $\eta=0.005$  である。これによれば、両者は完全に一致しており、又、他の境界条件、 $\mu_h, \beta$  の場合も同様な結果を得ていることから 2, d. の解法は妥当であるといえる。尚、式 (37) の諸係数を  $\bar{D}_{pms}$ ,  $\bar{C}_{pms}$  ( $p=1$ ,

2), 式 (38) のそれを  $\tilde{D}_{pms}, \tilde{C}_{pms}$  とするとこれらの諸係数間には,  $\eta$  が微小であることを考慮すると式 (62)

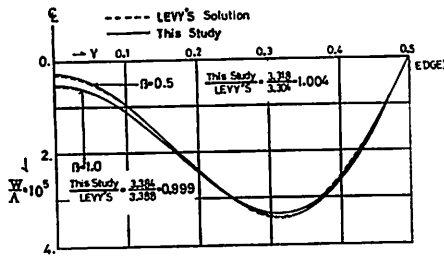
Table 1

(a)

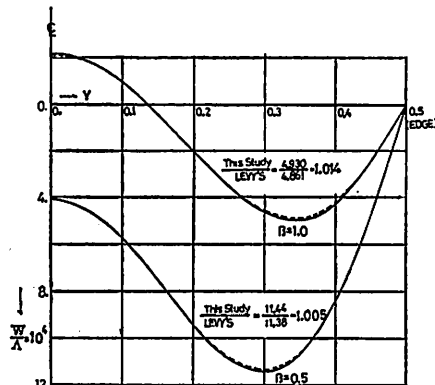
| STEP NO. | $\Lambda$   |             | $W_{10.5, 0.58}$ |       |
|----------|-------------|-------------|------------------|-------|
|          | $\Lambda_t$ | $\Lambda_d$ | $W_t$            | $W_d$ |
| 3        | 1949.3      | 1949.3      | 1.106            | 1.106 |
| 7        | 2485.0      | 2485.0      | 2.698            | 2.698 |
| 11       | 2235.6      | 2235.6      | 4.255            | 4.255 |
| 15       | 2269.4      | 2269.4      | 5.389            | 5.389 |

(b)

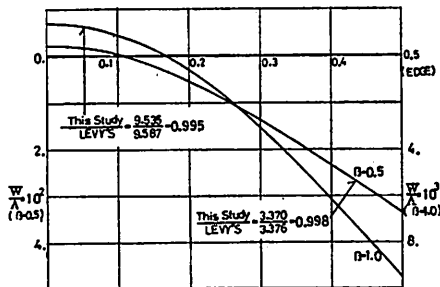
| STEP NO. | I                |                  |                  |                  | II               |                  |                  |                  |
|----------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|
|          | $\tilde{D}_{ms}$ | $\tilde{D}_{ms}$ | $\tilde{C}_{ms}$ | $\tilde{C}_{ms}$ | $\tilde{D}_{ms}$ | $\tilde{D}_{ms}$ | $\tilde{C}_{ms}$ | $\tilde{C}_{ms}$ |
| 3        | 113.596          | -150.867         | 47.128           | -7.249           | 260.478          | -37.211          | 20.381           | -27.655          |
| 7        | 147.282          | -197.040         | 89.976           | -13.536          | 338.687          | -49.646          | 39.012           | -52.588          |
| 11       | 137.936          | -186.291         | 118.815          | -17.430          | 318.362          | -48.205          | 51.662           | -69.132          |
| 15       | 158.723          | -214.662         | 143.519          | -20.667          | 366.531          | -55.751          | 67.531           | -83.234          |



(a) Pinned



(b) Roller



(c) Free

Fig. 4 Comparison between levy's solution and this study  $\mu_h=200$  ISO ( $\gamma=\zeta=0.5, \alpha=60^\circ$ )

が成立し, Table 1 (b) に示される数値計算結果もほぼこの関係式を満足している。

$$\left. \begin{aligned} \bar{D}_{1ms} &= \frac{1}{2} \left\{ \tilde{D}_{1ms} + \left( 1 - \frac{\sqrt{2}}{4} \sqrt{\eta} \right) \tilde{D}_{2ms} \right\} \\ \bar{D}_{2ms} &= \frac{1}{2} \left\{ -\tilde{D}_{1ms} + \left( 1 + \frac{\sqrt{2}}{4} \sqrt{\eta} \right) \tilde{D}_{2ms} \right\} \\ \bar{C}_{1ms} &= \frac{1}{2} \left\{ \tilde{C}_{1ms} + \left( 1 - \frac{\sqrt{2}}{4} \sqrt{\eta} \right) \tilde{C}_{2ms} \right\} \\ \bar{C}_{2ms} &= \frac{1}{2} \left\{ -\tilde{C}_{1ms} + \left( 1 + \frac{\sqrt{2}}{4} \sqrt{\eta} \right) \tilde{C}_{2ms} \right\} \end{aligned} \right\} \dots (62)$$

b. Levy 解との比較

線形厳密解である Levy 解と本数値解析法により得られる線形解を対称変形解析の場合について比較する。解析結果の一例として,  $\gamma=\zeta=0.5, \alpha=60^\circ, \mu_h=200, \beta=0.5, 1$ , 境界条件ピン, ローラー, フリーの場合についてまとめたものを Fig. 4 に示す。尚, 計算項数は Levy 解の場合母線方向展開項数を 2 項, 本解法の場合  $m$  を 2 項,  $k_s$  を 4 項迄採用した。Fig. 4 より本解法は変位波形, 最大値とともに極めて精度の高い結果を与えていることが分かる。

c. Navier 解との比較

周辺ローラーの場合, 非線形基礎式 (19), (20) の近似解は, Navier 解法 ( $W = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \omega_{mn} \sin m\pi X \sin n\pi Y$ ,  $F = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N f_{mn} \sin m\pi X \sin n\pi Y$  とおき, Galerkin 法を適用する。) により得られ, これと本解法による解との比較を  $\gamma=\zeta=0.5, \alpha=60^\circ, \mu_h=200, \beta=1.0$  について行い結果を Fig. 5 に示す。尚, Navier 解の採用項数は  $M$  を 2 項,  $N$  を 4 項迄, 本解法では  $m$  を 2 項,  $k_s$  は 4 項迄考慮している。Fig. 5 より両者は  $\Lambda=1500$  で僅かに違いが見られるものの大略一致している。

d. 計算所要項数

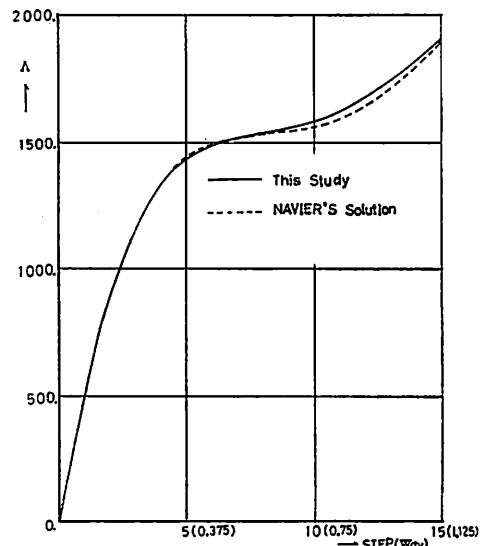
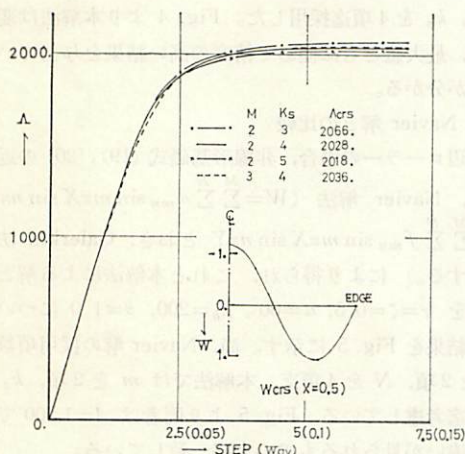


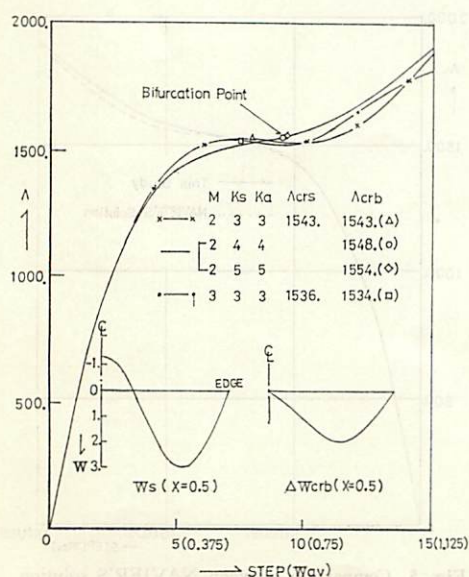
Fig. 5 Comparison between NAVIER'S solution and this study ( $\beta=1, \mu_h=200, \text{ISO}$ )



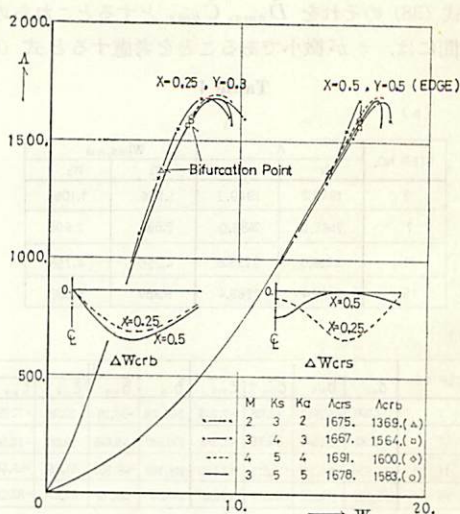
非線形基礎式の原点から対称（上限）座屈点あるいは分岐座屈点迄の解を充分な精度で計算するには  $m, k_s, k_a$  を適切に与えなければならない。等方性綱目、母線緑ピン、ローラー、フリー、 $\beta=0.5 \sim 1, \mu_h=100 \sim 300$  を対象とし、 $m, k_s, k_a$  と解の変化を検討したところ、ピン、ローラーについては  $m$  を 2 項、 $k_s, k_a$  を 4 項、フリーについては  $m$  を 3 項、 $k_s, k_a$  を 5 項迄採用すれば、精度よく計算できることが分った。ここでは解析結果の一例を境界条件毎に示し、又上記計算項数のときの結果をもとに各例題の座屈性状について述べる。Fig. 6 (a) はピン、 $\beta=0.5, \mu_h=200$  の場合で、分岐座屈が先行することなく、対称座屈が生じ、座屈点変位： $W_{crs}$  の円弧方向半波形数： $N$  は 3 である。Fig. 6 (b) はローラー、 $\beta=1, \mu_h=200$  の場合で基本経路は反曲点を持ち、この点と分岐座屈点がほぼ一致している。尚これら



(a) Pinned,  $\beta=0.5, \mu_h=200$ , ISO



(b) Roller,  $\beta=1, \mu_h=200$ , ISO



(c) Free,  $\beta=0.5, \mu_h=266.8$ , ISO

Fig. 6 Convergence of solution— $m, k_s, k_a$

の点近傍の対称変形： $W_s$  の  $N$  は 3、分岐座屈モード： $\Delta W_{crb}$  の  $N$  は 2 である。Fig 6 (c) はフリー、 $\beta=0.5, \mu_h=266.8$  の場合で、対称大変形解析のときは、 $m$  を 2 項、 $k_s$  を 3 項迄でも比較的高精度の解を得ることができるが、分岐座屈解析の場合も考慮すると結局  $m$  を 3、 $k_s, k_a$  を 5 項迄採用しなければならない。対称座屈点の前に分岐座屈点が存在し、 $\Delta W_{crb}$  の  $N$  はほぼ 2 と見做せる。又、対称座屈点直後の変位増分： $\Delta W_{crs}$  より、対称座屈点でシェル中央部及  $X=0.25$  (0.75),  $Y=0.35$  (−0.35) 近傍の変形が急増することが分かる。

#### § 4 ま と め

三角形綱目が斜材と母線方向部材によって組まれ且つ周辺が妻側ローラー、母線縁任意境界をもつ円筒綱目シェル屋根が一樣外圧を受ける場合の全体座屈性状を理論的に解明すべく、本論文では、研究の端緒として、有限変形を考慮した曲線梁の連続体置換により非線形基礎式を導き、その数値解析法を対称大変形解析及中央母線に関する逆対称分岐座屈解析の場合について示した。数値解析法の概略は次の通りである。

① 母線方向に Kantorovich 法を適用し連立非線形偏微分方程式を円弧方向に関する連立非線形常微分方程式に変換する。

② これらの式を非線形項を含む強制項と見做し、各母線方向展開次数に関する線形常微分方程式の如く扱うことにより、解を余解と特解の線形和で表わす。従って、任意の母線縁境界条件に対して数値解析が可能となる。尚、余解は綱目パラメータのとり方によって関数型が変化し本論文では三つの場合を扱っている。又、特解は、Fourier 三角級数で展開する。

③ 最終的には他の非線形数値計算法と同様に連立代



数方程式に帰着され、これを Newton-Raphson 法を適用して解く。

さらに母線縁境界がピン、ローラー、フリーの場合について数例ではあるが本解法を適用して数値計算を行い、Levy 解及 Navier 解との比較、準等方性網目の場合に用いる別解法及計算所要項数に関して検討したところ極めて良好な結果を得、妻側ローラー、母線縁辺任意境界をもつ円筒網目シェル屋根の幾何学的非線形解析を比較的少ない計算項数で精度よく行える様になった。

謝辞 本研究を進めるにあたり、御指導して下さいた都立大学寺田貞一教授、並びに有益な御助言を頂いた都立大学伊藤文人教授に謝意を表します。

#### 参 考 文 献

- 1) Douglas T. Wright : Membrane Forces and Buckling in Reticulated Shells, Proc. of ASCE, ST 1, February, 1965.
- 2) Buchert, K.P. : Guide to Stability Design Criteria for Metal Structures, p. 514~p. 523 [Shell and Shell-Like Structures] 3rd. Ed. Edited By Bruce G. Johnston John Wiley & Sons 1976.
- 3) Norio Chiba [Reticulated Cylindrical Steel Shell Composed of a Single Layer with Wide-Flange Shapes] Proc. IASS. 1971.
- 4) 米国土木学会編：円筒シャーレの設計、横尾他訳、1954、丸善。
- 5) K. Uchiyama : The Buckling of Cylindrical Shell Roofs, Large Span Shell, Proc. IASS. Congress, p. 743~p. 758, 1968.
- 6) 津下一英：屋根型円筒シェルの座屈、日本建築学会論文報告集, No. 77, 昭和 37 年 9 月。
- 7) M. Capurso : Critical Loads of Self-Supporting Cylindrical Shell Roofs, Int. J. Solids Structures, 3, p. 117~p. 141, 1967.
- 8) K.H. Chu and P. Turula : Buckling of Open Cylindrical Shells Under Lateral Loads, Proc. of ASCE EM 6, 1970, Vol. 96.
- 9) 松井徹哉, 松岡 理：自由母線縁をもつ偏平円筒シェル屋根の座屈・座屈後挙動の解析、日本建築学会 大会学術講演梗概集, 昭和 49 年 10 月。
- 10) 横尾, 中村他：周辺固定部分円筒殻の飛越座屈の数値解析、周辺固定部分円筒殻の飛越現象に及ぼす初期不整形の影響、日本建築学会学術講演梗概集, 昭和 46 年 11 月。初期不整形を有する周辺固定部分円筒殻の座屈実験、日本建築学会学術講演梗概集, 昭和 51 年 10 月。
- 11) R.H. Leicester : Finite Deformations of Shallow Shells, ASCE, EM 6, December, 1968.
- 12) Neng-Ming Wang, Hilario L. Oh, and Kuo-Kuang Chen : Large Deflection of Shallow Shells, ASCE, EM 4, August, 1973.
- 13) 坪井善勝：ガウス曲率とシェルの座屈 (I)~(V)、日本建築学会論文報告集, No. 230~No. 234, 昭和 50 年 4 月~8 月。
- 14) Carlos Brebbia, Jerome Connor : Geometrically Non-linear Finite-Element Analysis, ASCE, EM 2, April, 1969.
- 15) Robert R. Archer, Pei-Kao, Hsueh : Large Deflection of Shallow Rectangular Shell Pannels, AIAA, Vol. 8, No. 2, February, 1970.
- 16) M. Ozaki : A Practical Method for the Analysis of Space Framework Plates and Shells, Proc. IASS, 1971.
- 17) Howard L. Schreyer and Ernest F. Masur : Buckling of Shallow Arches, ASCE, EM 4, August, 1966, p. 1~p. 19.
- 18) A.C. Walker : A Non-Linear Finite Element Analysis of Shallow Circular Arches, Int. J. Solids Structures, p. 97~p. 107, Vol. 5, 1969.
- 19) D.O. Brush and F.A. Field : Buckling of a Cylindrical Shell Under a Circumferential Band Load, Journal of the Aerospace Sciences, Vol. 26, 1959, p. 825~p. 830.

## SYNOPSIS

U.D.C. 624.074.4 : 624.075.2

### GENERAL BUCKLING OF CYLINDRICAL RETICULATED SHELL ROOFS WITH ARBITRARY GENERATOR EDGES

Part 1 : Analytical Method of Nonlinear Basic Equations.

by TSUTOMU KOKAWA, Member of A.I.J.

The purpose of this study is to make clear theoretically general buckling behaviour of Cylindrical Reticulated Shell Roofs (C.R.S.R) having cylindrical surface composed of regularly fairly fine, triangular grids formed by a single layer of prismatic structural members on the longitudinal and diagonal lines.

In this paper (Part 1), nonlinear basic equations of C.R.S.R. subjected to external pressure are derived by planely continuous treatment of a curved beam and then under the boundary conditions that the two ends of the structure are simply supported and the two generator edges are arbitrary, nonlinear basic equations are solved in the case of symmetrically large deflection and bifurcation buckling with respect to longitudinal center line.