

任意母線縁境界をもつ円筒網目シェル屋根の 全体座屈解析

その 2 一様外圧下における座屈性状

正 会 員 粉 川 牧*

§1 序

単層の剛接合（以下では省略）円筒網目シェル屋根では曲げ剛性の不足により生ずる全体座屈が構造設計上重要な問題であるが、この点に関して未だ充分な解明がなされていない。本論文は論文（その 1）²¹⁾ で示した数値解析法に基づき、初期曲面不整がなく、妻側でローラー支持された円筒網目シェル屋根の一様外圧下に於ける幾何学的非線形解析を、(1) 網目パラメータ (r, ζ, α)、(2) 母線縁境界条件（ピン、ローラー、フリー、etc.）、(3) シェル形状パラメータ (μ_h, β) に着目して行い、対称座屈あるいは中央母線に関する逆対称分岐座屈性状を解析的に解明することを主たる目的とし、およそ次の内容をもつ。

§2 では、(1) 網目が等方性（斜材、母線方向部材ともに同一部材を使用し且つ正三角形に組む。即ち $r=\zeta=0.5, \alpha=60^\circ$ ）、(2) 母線縁ピン、ローラー、フリー、(3) シェル形状パラメータが $\mu_h=100\sim300, \beta=1, 1/1.5, 0.5$ について数値計算を行い、等方性円筒網目シェル屋根の全体座屈性状を解析的に解明する。

§3 では、網目の直交異方性に着目し、網目の組み方及母線縁境界が、1. 斜材、母線方向部材が同一で角度 α が変化し、母線縁ローラー、2. 正三角形網目、斜材、母線方向部材の断面形を円管とし管径比を変化させ、母線縁がローラー、3. 母線縁がピン、母線方向部材の曲げ剛性が零の各場合について数値計算を行い、その座屈性状を明らかにする。

論文（その 1）で示した様に、等方性網目の場合、連続体置換より得られる非線形基礎式は Donnell 式に一致する。§4 では、等方性網目の場合の数値解析を、母線縁フリー、固定の場合について行い、2, 3 の既往の等方性部分円筒殻の実験結果と比較する。

尚、本論の記号、式番号は前報に引き続き使用するが、このうち記号について前報で用いさらに本論でも用いるものを以下に再記する。

r, ζ : 斜材に対する母線方向部材の軸、曲げ剛性比を

表わすパラメータ、 α : 斜材と母線方向部材の成す角度、 μ_h : 曲面形状パラメータ $\left(=\frac{B^2}{Rt_h}\right)$ 、 β : 辺長比 $\left(=\frac{B}{L}\right)$ 、 B : 円弧長、 R : 円筒面曲率半径、 L : 母線方向スパン長、 t_h : 等価板厚、 E_h : 等価ヤング係数、 $q(A)$: (無次元) 法線方向荷重、 $\varphi(F)$: (無次元) 応力関数、 $w(W)$: (無次元) 法線方向変位

§2 等方性円筒網目シェル屋根の座屈性状

網目が等方性 ($r=\zeta=0.5, \alpha=60^\circ$) の場合、論文（その 1）で示した様に、連続体置換によって導かれる非線形基礎式は丁度ポアソン比 1/3 の Donnell 式と一致する。従って等方性円筒網目シェル屋根の座屈問題は等方性円筒殻のそれに等価である。これを念頭におきつつ、§2 では等方性網目の場合の幾何学的非線形解析を、母線縁がピン、ローラー、フリー、広範なシェル形状のもとで、対称座屈点あるいは中央母線に関する逆対称分岐座屈点迄の範囲にて行い、さらに「古典座屈値」を導入して等方性円筒網目シェル屋根の座屈性状を理論的に解明する。

a 古典座屈値

偏平球殻に於ける座屈値の整理方法に倣って、非線形解析より得られる座屈値（対称座屈値： λ_{crr} 及中央母線に関する逆対称分岐座屈値： λ_{crrB} ）を一様外圧下に於ける閉円筒網目シェルの座屈値（「古典座屈値」： λ_{cro} ）との比率によって表わす。ここでは、本研究で用いる「古典座屈値」について説明する。すでに古典座屈式として Von Mises 式²²⁾ (63) (但しポアソン比 $\frac{1}{3}$) があるがこれは等方性の場合に限られており、本研究の様な直交異方性の場合には使えない。そこで次の様にして新たに「古典座屈式」を求めた。

$\varphi_0'' = -Rq, w_0 = \text{一定}$ — (64) は式 (15), (16) を満足しこれは座屈前の一様圧縮応力状態を示す。この状態から座屈したとする。 $\varphi = \bar{\varphi} + \varphi_0, w = \bar{w} + w_0$ を式 (15), (16) に代入し且つ非線形項を省略すると $\bar{\varphi}, \bar{w}$ に関する固有値方程式を得る。

$$\frac{1}{E_h t_h} \left\{ \bar{\varphi} \cdots + \left(\frac{r}{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} - 2 \cot^2 \alpha \right) \bar{\varphi}'' \cdots \right\}$$

* 東京都立大学 大学院生
(昭和 53 年 8 月 31 日日本稿受理・討論期限昭和 54 年 12 月末日)

$$\left. \begin{aligned} & + \left(\cot^4 \alpha + \frac{r}{\sin^4 \alpha} \right) \tilde{\varphi}'''' + \frac{\tilde{w}''}{R} = 0 \\ & 3/32 \cdot E_h t_h^3 \left\{ \tilde{w}'''' + 6 \cot^2 \alpha \tilde{w}'''' \right. \\ & \left. + \left(\cot^4 \alpha + \frac{\zeta}{\sin^4 \alpha} \right) \tilde{w}'''' - \frac{\tilde{\varphi}''}{R} + R q \tilde{w}'' = 0 \right\} \end{aligned} \right\} \quad (65)$$

式 (65) を両端ローラー条件のもとに解く。

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi} &= \tilde{\varphi}_n \sin \frac{\pi}{L} x \sin n\theta, \quad \tilde{w} = \tilde{w}_n \sin \frac{\pi}{L} x \sin n\theta, \\ n &= 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

を式 (65) に代入すると結局、

$$\begin{aligned} \frac{R}{E_h t_h} q_{cro} &= \frac{1}{n^2 \left\{ \left(\frac{nL}{R\pi} \right)^4 + \left(\frac{r}{\sin^4 \alpha \cos^2 \alpha} - 2 \cot^2 \alpha \right) \right.} \\ & \quad \cdot \left. \left(\frac{nL}{R\pi} \right)^2 + \left(\cot^4 \alpha + \frac{r}{\sin^4 \alpha} \right) \right\}} \\ & + \frac{3}{32} \left(\frac{t_h}{R} \right)^2 n^2 \left\{ 1 + 6 \cot^2 \alpha \left(\frac{R\pi}{nL} \right)^2 \right. \\ & \quad \left. + \left(\cot^4 \alpha + \frac{\zeta}{\sin^4 \alpha} \right) \left(\frac{R\pi}{nL} \right)^4 \right\} \dots \dots \dots (66) \end{aligned}$$

等方性網目の場合は式 (66) に $r=\zeta=0.5$, $\alpha=60^\circ$ を代入し式 (67) を得る。

$$\begin{aligned} f_0 &= \frac{R}{E_h t_h} q_{cro} = \frac{1}{n^2 \left(1 + \frac{n^2 L^2}{\pi^2 R^2} \right)^2} \\ & + \frac{3}{32} \left(\frac{t_h}{R} \right)^2 n^2 \left(1 + \frac{\pi^2 R^2}{n^2 L^2} \right)^2 \dots \dots \dots (67) \\ f_1 &= \frac{R}{E_h t_h} q_{cr1} = \frac{1}{(n^2 - 1) \left(1 + \frac{n^2 L^2}{\pi^2 R^2} \right)^2} \\ & + \frac{3}{32} \left(\frac{t_h}{R} \right)^2 \left(n^2 - 1 + \frac{2n^2 - \frac{4}{3}}{1 + \frac{n^2 L^2}{\pi^2 R^2}} \right) \dots \dots \dots (63) \end{aligned}$$

Von Mises 式 (63) と式 (67) を比較する為、 f_0/f_1 を $\frac{t_h}{R} = \frac{1}{100} \sim \frac{1}{300}$, $\frac{L}{R} = 0.5 \sim 2.0$ について計算し、その結果を Fig. 1 に示す。

Fig. 1 より $\frac{L}{R} = 1.0 \sim 2.0$ では両者はほとんど差がなく ($f_0/f_1 < 1.05$)、又、 $\frac{t_h}{R}$ が小さくなるほど両者は

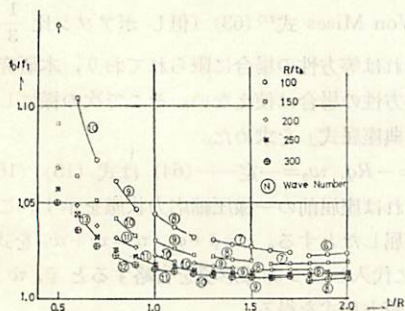


Fig. 1 Comparison between Von Mises (f_1) and Donnell (f_0)

より近づく傾向にある。式 (66) に無次元量を導入し変形すると、

$$\begin{aligned} A_{cro} &= \frac{q_{cro}}{E_h} \left(\frac{B}{t_h} \right)^4 \\ &= \mu_h^3 \left[\frac{1}{(\theta_0 n)^2 \left\{ \left(\frac{\theta_0 n}{\beta \pi} \right)^4 + \left(\frac{r}{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} - 2 \cot^2 \alpha \right) \right.} \right. \\ & \quad \cdot \left. \left(\frac{\theta_0 n}{\beta \pi} \right)^2 + \left(\cot^4 \alpha + \frac{r}{\sin^4 \alpha} \right) \right\}} \\ & + \frac{3}{32} \frac{1}{\mu_h^2} (\theta_0 n)^2 \left\{ 1 + 6 \cot^2 \alpha \left(\frac{\beta \pi}{\theta_0 n} \right)^2 \right. \\ & \quad \left. + \left(\cot^4 \alpha + \frac{\zeta}{\sin^4 \alpha} \right) \left(\frac{\beta \pi}{\theta_0 n} \right)^4 \right\} \right] \dots \dots \dots (68) \end{aligned}$$

ここに θ_0 は開角を表わし、式 (68) の $(\theta_0 n)$ に関する最小値を本論文では「古典座屈値」: A_{cro} と称する。 $r=\zeta=0.5$, $\alpha=60^\circ$ のとき式 (68) の性質を検討する為、 $\beta=1, 1/1.5, 1/2$ に対し、 $100 \leq \mu_h \leq 300$ で A_{cro} を計算し、 $\log A_{cro}$ と $\log \mu_h$ をプロットしてみると両者間に直線関係が成立していることが確認された。 $\bar{y} = \log A_{cro}$, $\bar{x} = \log \mu_h$ とし各 β に対し近似式をつくると次の様になる。

$$\begin{aligned} \beta=1 \text{ のとき} & \quad \bar{y} = 1.4467 \bar{x} + 0.1366 \\ \beta=1/1.5 & \quad \bar{y} = 1.4585 \bar{x} - 0.0829 \\ \beta=1/2 & \quad \bar{y} = 1.4684 \bar{x} - 0.2380 \end{aligned} \quad \dots \dots \dots (69)$$

Table 1 $A_{cro}(\text{Iso})$

μ_h	$\beta=1.0$	$\beta=1/1.5$	$\beta=0.5$
100	1072. (1072.)	681.7 (682.5)	499.6 (499.8)
125	1476. (1480.)	943.5 (945.0)	693.2 (693.6)
150	1919. (1926.)	1231. (1233.)	906.3 (906.5)
175	2397. (2408.)	1543. (1544.)	1137. (1137.)
200	2909. (2921.)	1877. (1876.)	1385. (1383.)
225	3451. (3463.)	2231. (2227.)	1648. (1644.)
250	4023. (4034.)	2605. (2597.)	1926. (1919.)
275	4622. (4630.)	2997. (2984.)	2217. (2207.)
300	5248. (5251.)	3407. (3388.)	2522. (2508.)

Table 1 に式 (68), (69) より得られる A_{cro} を示す。表中 () は式 (69) より得られる値で、式 (69) が極めて精度のよい近似式であることが分かる。

母線縁境界条件が円筒網目シエル屋根の幾何学的非線形挙動ひいては座屈性状に如何なる影響を及ぼすかを検討する為、母線縁辺ピン、ローラー、フリー、シエル形状パラメータが $\mu_h=100$ (フリー, $\beta=1/2$ のみ 66.8) ~ 300 , $\beta=1, 1/1.5, 1/2$ の場合について非線形解析を行った。数値計算結果を境界条件毎にまとめ Fig. 2, 3, 4 に示す。尚、以後の文、図中で新たに用いる記号について説明する。

W_1 : ステップ 1 に於ける変位, W_{cr} : 座屈変位 (対称座屈の場合は A の極大値を与えるステップ, 分岐座屈の場合は分岐直後のステップに於ける対称変位を意味する), ΔW_{crs} : 座屈点に於ける変位増分 (対称座屈の場合は座屈点から直後のステップ迄の増分すなわち対称

座屈モード、分岐座屈の場合は分岐点前後のステップに於ける対称変位増分を意味する), ΔW_{crB} : 分岐座屈モード, N : 座屈モードの半波形数 (Fig. 5 参照)

b ピン

増分パラメータとして W_{av} を採用し, 1 ステップの増分量を, $\mu_h=300$, $\beta=1$ の場合を除き, $\Delta W_{av}=0.02$ として計算を行った。尚, 計算項数は精度を確めた上で特記なき場合は $m=2$, $k_s=k_a=4$ 項とする (論文 (その1) §3 参照)。計算結果は Fig. 2 に示され, これらの図を参照しつつ結果を要約すると,

(1) Fig. 2 (a) に各 β に対する $\Lambda_{cr}/\Lambda_{cro}-\mu_h$ 曲線を, (b)~(d) に $\Lambda_{cr}/\Lambda_{cro}-W_{av}$ 曲線及 $\mu_h-(\Lambda_{crs}, \Lambda_{crB})/\Lambda_{cro}$ の表を示す。(a) より $\Lambda_{cr}/\Lambda_{cro}$ は 1 より大きく, 以下に示す各 β , N に対応して $\Lambda_{cr}/\Lambda_{cro}$ は近似的に $k_1 \frac{1}{\mu_h} + k_2 \mu_h + k_3$ で表わせる。ここに k_1 , k_2 , k_3 は β , N を与えて決まる定数と考えられる。

$\beta=1$, $N=3$:

$$\Lambda_{crs}/\Lambda_{cro} = 54.0 \frac{1}{\mu_h} + 6.04 \times 10^{-3} \mu_h - 0.014, \quad 100 \leq \mu_h \leq 150$$

$\beta=1$, $N=4$:

$$\Lambda_{crB}/\Lambda_{cro} = 264 \frac{1}{\mu_h} + 4.88 \times 10^{-3} \mu_h - 0.969, \quad 175 \leq \mu_h \leq 275$$

$\beta=1/1.5$, $N=3$:

$$\Lambda_{crs}/\Lambda_{cro} = 94.5 \frac{1}{\mu_h} + 4.20 \times 10^{-3} \mu_h + 0.067, \quad 100 \leq \mu_h \leq 275$$

$\beta=0.5$, $N=3$:

$$\Lambda_{crs}/\Lambda_{cro} = 99.4 \frac{1}{\mu_h} + 1.59 \times 10^{-3} \mu_h + 0.652, \quad 100 \leq \mu_h \leq 300$$

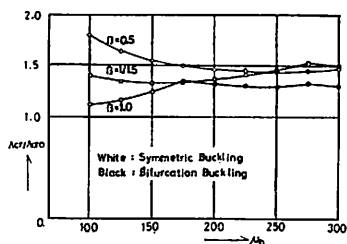
..... (70)

(2) $\beta=1$, $\mu_h=300$ の場合, (g) に示す様に分岐座屈点直後で新しく $N=5$ の増分モードが生じており, シェル中央部の局部座屈発生の可能性も充分考えられる。

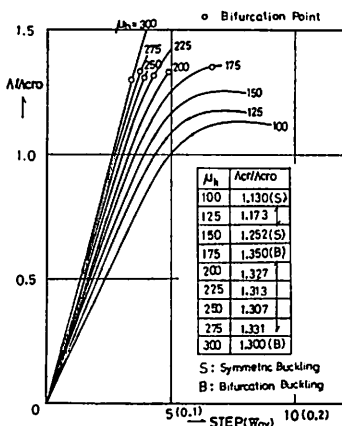
(3) (e), (f) より変位波形は荷重の増加につれ, より高次となる。

(4) (b)~(d) より, 対称座屈の場合の $\Lambda/\Lambda_{cro}-W_{av}$ は第 2 勾配がほぼ零の Bi-Linear 型で表わせる。

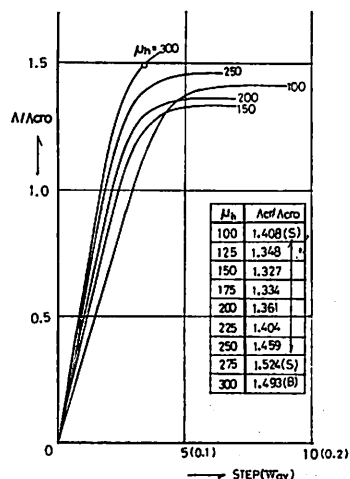
e ローラー



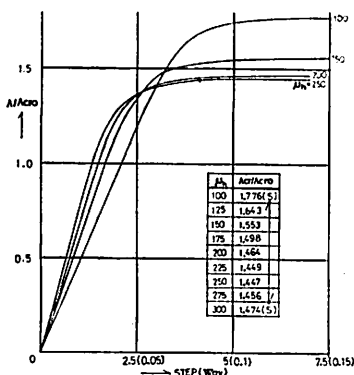
(a) $\Lambda_{cr}/\Lambda_{cro}-\mu_h, \beta$



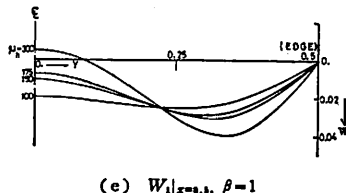
(b) $\Lambda/\Lambda_{cro}-W_{av}, \beta=1$



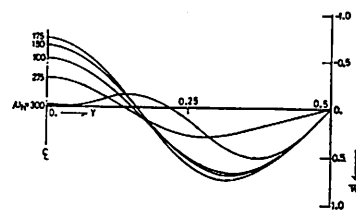
(c) $\Lambda/\Lambda_{cro}-W_{av}, \beta=1/1.5$



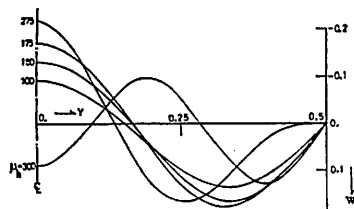
(d) $\Lambda/\Lambda_{cro}-W_{av}, \beta=0.5$



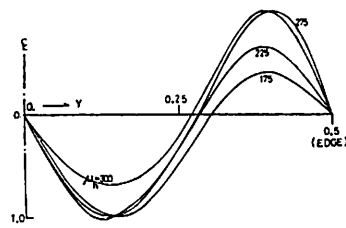
(e) $W|_{x=0.5}, \beta=1$



(f) $W_{crs}|_{x=0.5}, \beta=1$



(g) $\Delta W_{crs}|_{x=0.5}, \beta=1$



(h) $\Delta W_{crB}|_{x=0.5}, \beta=1$

Fig. 2 Pinned (Iso.)

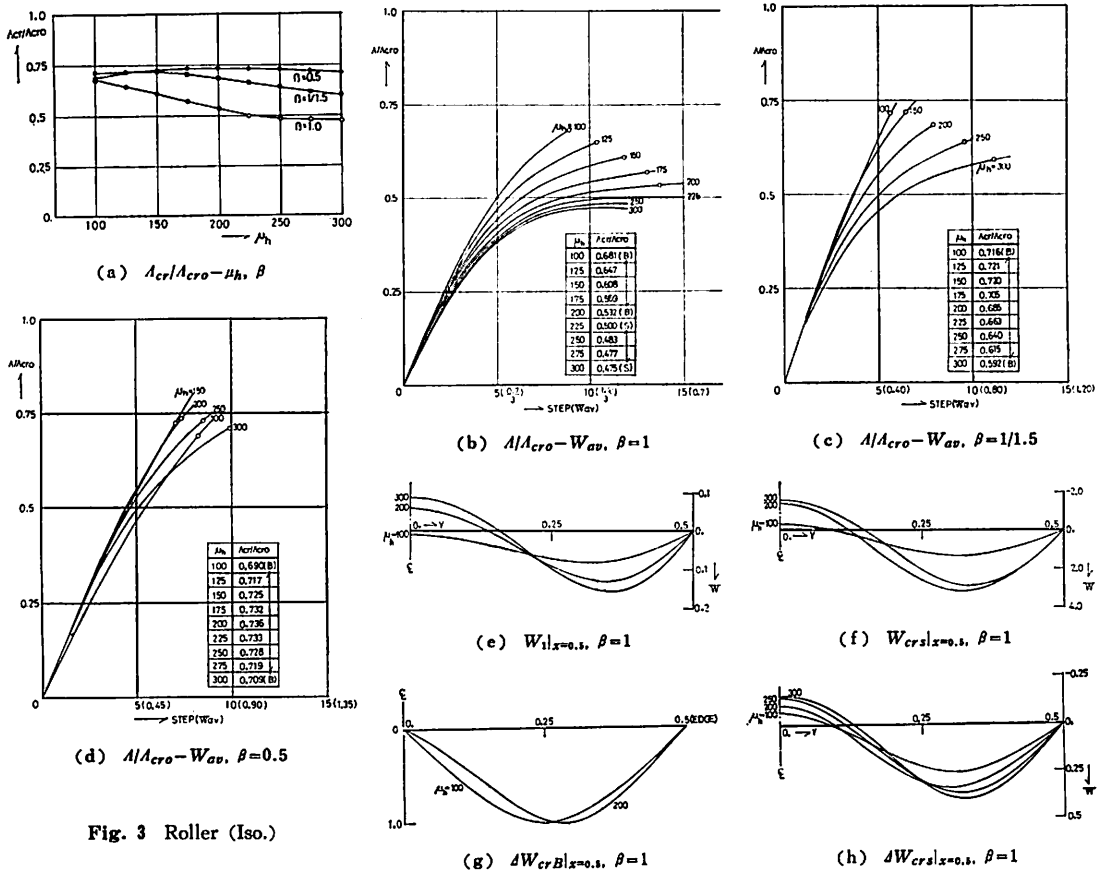


Fig. 3 Roller (Iso.)

増分パラメータとして W_{av} を採用して、 $\beta=1, 1/1.5, 0.5$ に対して各々 $\Delta W_{av}=0.14/3, 0.08, 0.09$ として計算し、結果を Fig. 3 に示す。尚、計算項数は $m=2, k_s=k_a=4$ 項である。結果を要約すると、

(1) Fig. 3(a) より A_{cr}/A_{cro} は 1 より小さく、 $\mu_h \geq 150$ では β が小さくなるにつれ増える傾向を示す。又、 $\beta=1, \mu_h \geq 225$ のとき対称座屈が生じ、他の場合は分岐座屈が先行する。

(2) 座屈モード半波数: N は分岐座屈の場合 2、対称座屈の場合 3 である。例として、 $\beta=1$ のときの $\Delta W_{crs}, \Delta W_{crb}$ を (g), (h) に示す。

(3) (a) より以下の β, μ_h の範囲が A_{crB}/A_{cro} を $k_1\mu_h + k_2$ で近似できる。

$$\left. \begin{aligned} \beta=1, 100 \leq \mu_h \leq 200: \\ A_{crB}/A_{cro} = -1.493 \times 10^{-3} \mu_h + 0.8308 \\ \beta=1/1.5, 150 \leq \mu_h \leq 300: \\ A_{crB}/A_{cro} = -9.04 \times 10^{-4} \mu_h + 0.8632 \end{aligned} \right\} \dots (71)$$

$\beta=1/2$ の場合、 A_{crB}/A_{cro} は $\mu_h=200$ のとき最大値 (0.736)、 $\mu_h=100$ のとき最小値 (0.690) をとり、 $100 \leq \mu_h \leq 300$ でほとんど変化しない。

(4) (b)~(d) より分岐座屈点迄の $A/A_{cro} - W_{av}$ は同一の β に対し μ_h が大きくなるにつれ、非線形性が

顕著となる。特に、 $\beta=1, 1/1.5$ のとき分岐座屈点前に於いて対称変位が急増する部分が存在し、その後、 $A/A_{cro} - W_{av}$ は近似的に直線関係を保ち、分岐点はこの直線上で生ずる。

d フリー

$\beta=1, 1/1.5$ 及 $\beta=1/2$ 且つ $\mu_h \geq 150$ の増分パラメータとして $X=0.25, Y=0.3$ に於ける変位: $W|_{0.25, 0.3}$ を採用し各々の $\Delta W|_{0.25, 0.3}$ は 0.3, 0.7, 0.95 として計算を行っている。又、 $\beta=1/2, \mu_h \leq 125$ では中央点 ($X=0.5, Y=0$) の変位: W_c を採用し、 $\mu_h=66.8, 100, 125$ に対し ΔW_c は各々 0.35, 0.3, 0.2 としている。計算項数は $m=3, k_s=k_a=5$ 項とし、結果を Fig. 4 に示す。

(1) Fig. 4(a) より A_{cr}/A_{cro} は 1 より小さく、 $\mu_h \geq 150$ では β が小さくなるにつれ増える傾向を示す。

(2) $\beta=1$ のとき $100 \leq \mu_h \leq 250$ に対し分岐座屈、 $\mu_h \geq 275$ の範囲では対称座屈が各々先行し、そのときの $\Delta W_{crb}, \Delta W_{crs}$ を (e), (f) に示す。(f) より、対称座屈は $Y=0.25(0.75)$ 近傍の局部的座屈を呈している。(b) より、分岐座屈点迄の $A/A_{cro} - W|_{0.25, 0.3}$ は μ_h が大につれ非線形性が顕著となり、このとき変位の急増する部分が分岐座屈点の前にある。

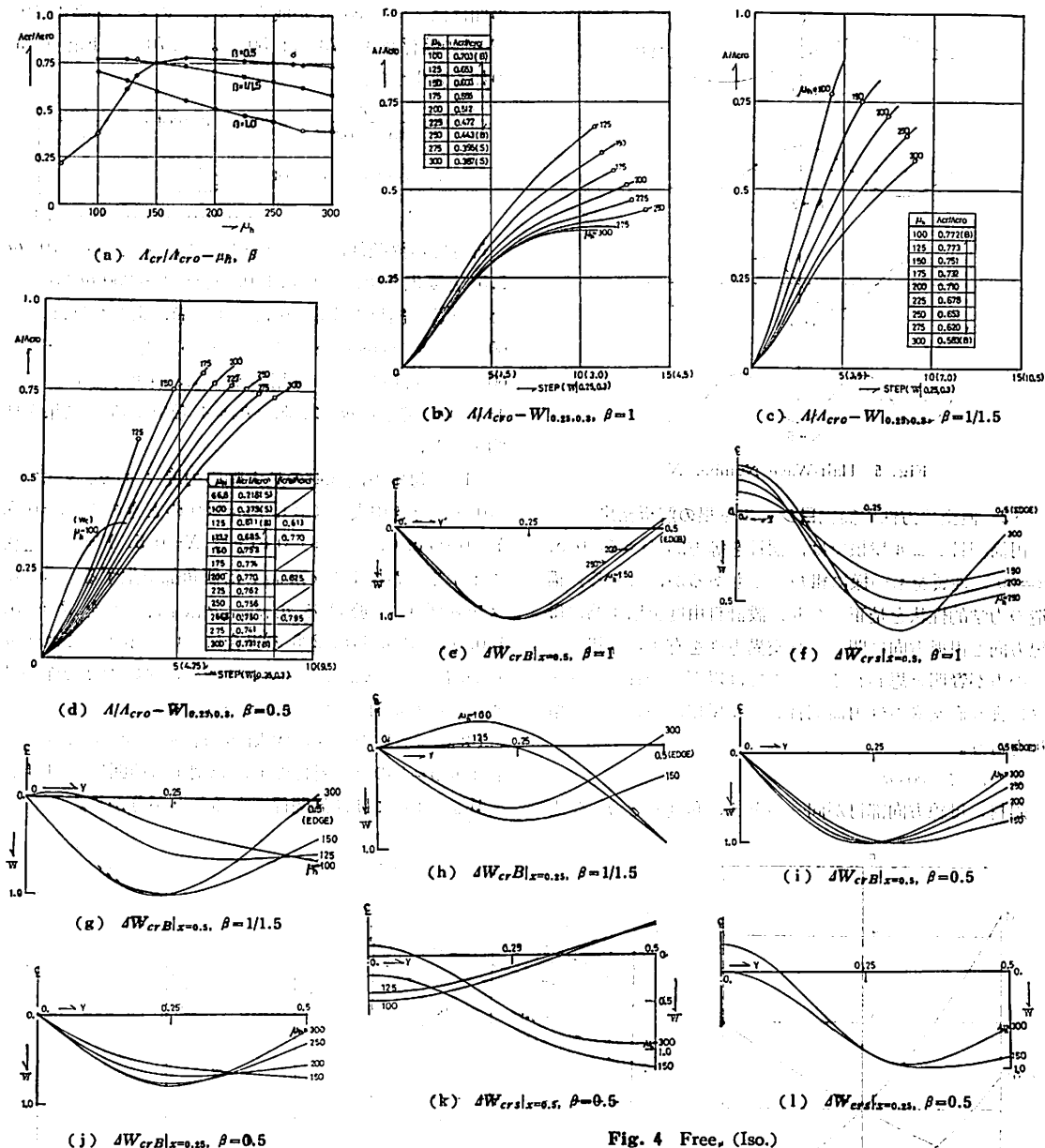


Fig. 4 Free, (Iso.)

(3) (a), (c) より $\beta=1/1.5$ のときすべての μ_h について分岐座屈が先行する。 ΔW_{crB} は (g), (h) に示す様に、 $\mu_h \leq 125$, $\mu_h \geq 150$ でモードが異なる。

(4) (a), (d) より $\beta=1/2$ のとき $A_{cr}/A_{cro} - \mu_h$ は $\beta=1, 1/1.5$ の単調な変化に比べてやや複雑である。 $\mu_h = 125$ で分岐座屈と対称座屈が極めて近接しており、 $\mu_h < 125$ では対称座屈、 $\mu_h > 125$ では分岐座屈が先行し、このときの座屈モードを (i), (j), (k), (l) に示す。

(5) (a) より各 β, μ_h が次の範囲では A_{crB}/A_{cro} をローラーと同様 $k_1 \mu_h + k_2$ で近似出来る。

$$\beta=1, 100 \leq \mu_h \leq 225:$$

$$A_{crB}/A_{cro} = -1.848 \times 10^{-3} \mu_h + 0.8878$$

$$\beta=1/1.5, 125 \leq \mu_h \leq 300:$$

$$A_{crB}/A_{cro} = -1.120 \times 10^{-3} \mu_h + 0.9283 \quad \dots (72)$$

$$\beta=1/2, 175 \leq \mu_h \leq 300:$$

$$A_{crB}/A_{cro} = -3.920 \times 10^{-3} \mu_h + 0.8488$$

e 境界条件の影響について

(1) ローラーとフリーでは、 $\beta=1/2, \mu_h \leq 150$ を除いて、両者の A_{cr}/A_{cro} , 座屈様式, 座屈モードは座屈前に於ける変形及応力状態に大きな違いがあるにも拘わらずほぼ一致している。

(2) ピンとローラーを比較して A_{cr}/A_{cro} は母線縁境界に於ける面内円弧方向の拘束の影響を大きく受けることが分かる。

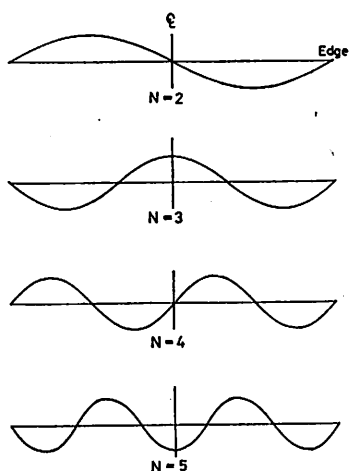


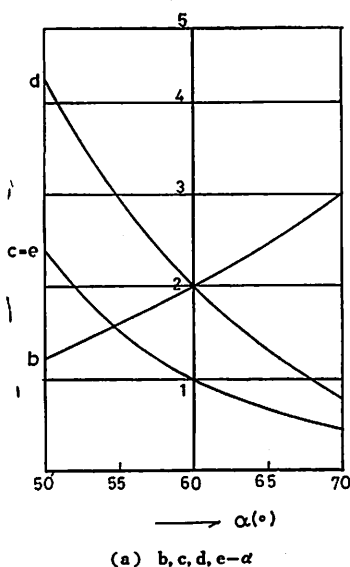
Fig. 5 Half-Wave Number N

§3 直交異方性円筒網目シェル屋根の解析結果

円筒網目シェル屋根では、網目を等方的 ($r=\zeta=0.5$, $\alpha=60^\circ$) 性質をもつ様に組むこともあるが、むしろ、構造の力学的性状を是正したり、設計自由度を増す為に母線方向と円弧方向に関して直交異方性を有する様組むことの方が賢明と思われる。ここでは以下の網目パラメータに従う直交異方性円筒網目シェル屋根について数値解析を行う。

a $r=\zeta=\cos \alpha$

斜材, 母線方向部材が同一のとき, 角度 α と r, ζ と



(a) b, c, d, e- α

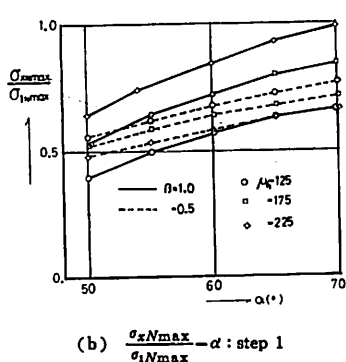
の間には $r=\zeta=\cos \alpha$ が成立する。このとき基礎式 (19), (20) の諸係数式 (73) は $50^\circ \leq \alpha \leq 70^\circ$ で Fig. 6 (a) の如く変化する。

$$\left. \begin{aligned} b &= \frac{r}{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} - 2 \cot^2 \alpha, \quad c = \cot^4 \alpha + \frac{r}{\sin^4 \alpha} \\ d &= 6 \cot^2 \alpha, \quad e = \cot^4 \alpha + \frac{\zeta}{\sin^4 \alpha} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (73)$$

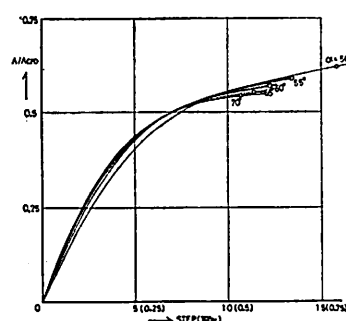
母線縁境界条件はローラーとして, α を $50^\circ \sim 70^\circ$ @ 2.5° と変化させ, $\beta=0.5, 1.0$, $\mu_h=125 \sim 250$ @ 25 について計算し結果を Fig. 6 に示す。尚, 余関数型は $\alpha < 60^\circ$ のとき $8 \cos^4 \alpha > r, \zeta$ であるから式 (37) を, $\alpha > 60^\circ$ のときは式 (38) を用いる。又, 採用項数は, ことわりのない限り $m=2$, $k_s=k_a=4$ 項である。結果を要約すると,

(1) 母線方向部材の最大軸応力度: σ_{xNmax} は, $\beta=0.5$ のとき中央点 (但し $\mu_h=250$ のときのみ $X=0.5$, $Y=0.05$ or 0.1), $\beta=1.0$ のとき $X=0.5$, $Y=0.3$ 近傍で生ずる。斜材 1 の σ_{1Nmax} は隅角部で生ずる。(b) にステップ 1 に於ける $\sigma_{xNmax}/\sigma_{1Nmax}-\alpha$ を $\beta=0.5$, 1.0 , $\mu_h=125, 175, 225$ の場合について示す。これより α が増すと $\sigma_{xNmax}/\sigma_{1Nmax}$ は増え, 軸応力度分布の是正に角度 α が有効であることが分かる。

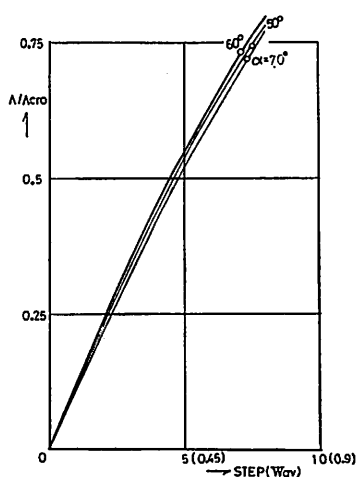
(2) $\beta=1$ のときの代表的解析例を (c) に示す。これより $\beta=1$ のとき対称変形が急増する範囲迄の $A/A_{cro} - W_{av}$ は α にほぼ無関係であることが分かる。



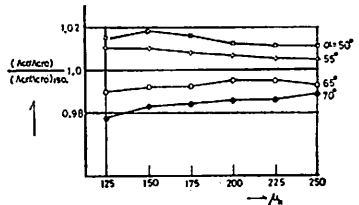
(b) $\frac{\sigma_{xNmax}}{\sigma_{1Nmax}} - \alpha$: step 1



(c) $A/A_{cro} - W_{av}$, $\beta=1$, $\mu_h=175$



(d) $A/A_{cro} - W_{av}$, $\beta=0.5$, $\mu_h=175$



(e) $\frac{(A_{cro}/A_{cro})_{iso}}{(A_{cro}/A_{cro})_{iso}} - \mu_h$

Fig. 6 $r=\zeta=\cos \alpha$, Roller

(3) $\beta=0.5$ のときの代表的な $A/A_{cro}-W_{av}$ を (d) に、又、同一の μ_h に於ける $(A_{cr}/A_{cro})/(A_{cr}/A_{cro})_{iso}$ (Iso. は等方性網目を意味する) と α の関係を (e) に各々示す。これより $A_{cr}/A_{cro}-W_{av}$, A_{cr}/A_{cro} , 座屈様式 (分岐座屈先行) は α に大略無関係であることが分かる。

$$b \quad r = \frac{1}{2} \left(\frac{D_x}{D} \right)^2, \quad \zeta = 2r^2, \quad \alpha = 60^\circ$$

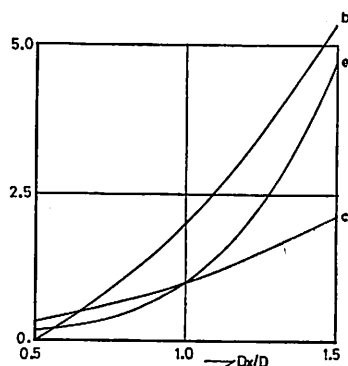
角度: α が 60° , 網目を構成する部材の断面形が h/D (板厚/直径) = 一定 ≤ 1 . なる条件をもつ円管断面の場合, $r = \frac{1}{2} \left(\frac{D_x}{D} \right)^2, \zeta = 2r^2$ が成立する。このときの基礎式の諸係数は $0.5 \leq \frac{D_x}{D} \leq 1.5$ で Fig. 7 (a) の様に変化する。但し, $\frac{D_x}{D}$ は母線方向部材と斜材の管径比であ

る。母線縁境界がローラーとし, $\frac{D_x}{D} = 0.5 \sim 0.9 @ 0.1, 1.0, 1.25, 1.5, \beta = 0.5, 1.0, \mu_h = 100, 200, 300$ について数値計算を行い, 結果の一部を Fig. 7 に示す。尚, $\frac{D_x}{D} < 1$ のとき式 (37) の余関数形, $\frac{D_x}{D} > 1$ のとき式 (38) を用い, 又, 計算項数は $m=2, k_s=k_a=4$ 項とした。結果をまとめると,

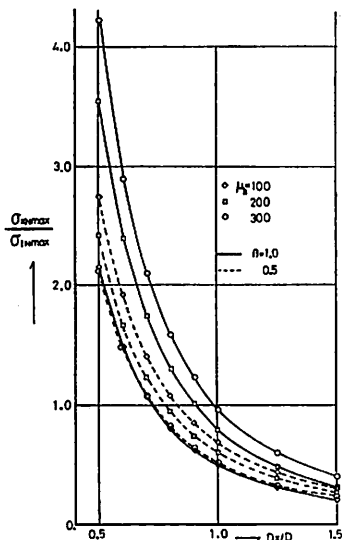
(1) ステップ 1 に於ける $\sigma_{xNmax}/\sigma_{1Nmax} - \frac{D_x}{D}$ を

Fig. 7 (b) に示す。これより $\frac{D_x}{D}$ (あるいは断面積比) が軸応力度分布は正に極めて有効であることが分かる。

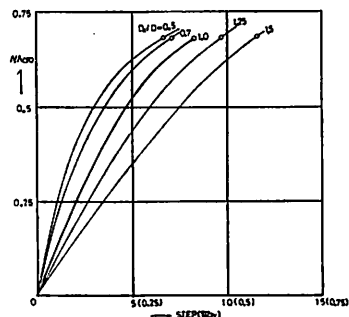
(2) $\beta=1$ のときは (c), (e) に示す様に, $\mu_h=100, 300$ に於いて $(A_{cr}/A_{cro})/(A_{cr}/A_{cro})_{iso}$ は $\frac{D_x}{D}$ によらずほぼ 1 である。 $\mu_h=200$ については (d) より $\frac{D_x}{D} \approx$



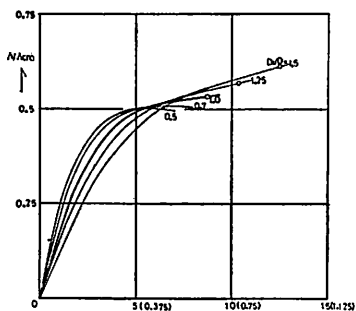
(a) b, c, d, e - D_x/D



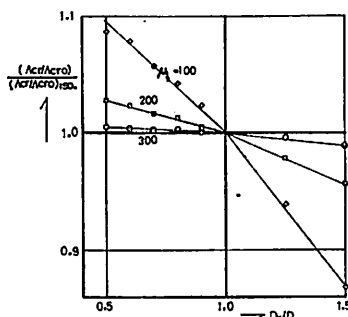
(b) $\frac{\sigma_{xNmax}}{\sigma_{1Nmax}} - D_x/D$



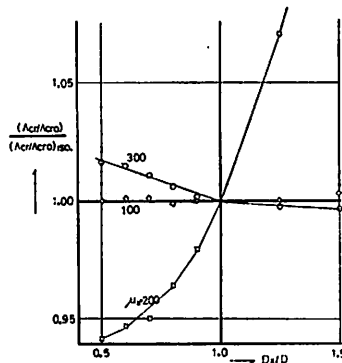
(c) $A/A_{cro}-W_{av}, \beta=1, \mu_h=100$



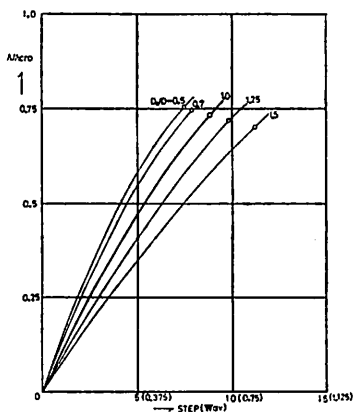
(d) $A/A_{cro}-W_{av}, \beta=1, \mu_h=200$



(e) $\frac{(A_{cr}/A_{cro})}{(A_{cr}/A_{cro})_{iso}} - D_x/D, \beta=0.5$



(f) $\frac{(A_{cr}/A_{cro})}{(A_{cr}/A_{cro})_{iso}} - D_x/D, \beta=1$



(g) $A/A_{cro}-W_{av}, \beta=0.5, \mu_h=200$

Fig. 7 $r = \frac{1}{2} \left(\frac{D_x}{D} \right)^2, \zeta = 2r^2, \alpha = 60^\circ$ Roller

0.7 を境にしてそれより小さい場合対称座屈, 大なる場合, 分岐座屈が先行し, 又, (e) より, $(A_{cr}/A_{cro})/(A_{cr}/A_{cro})_{iso}$ は $\frac{D_x}{D} < 1$ のとき 1 より小さく (例えば $\frac{D_x}{D} = 0.5$ のとき 0.942), $\frac{D_x}{D} > 1$ のとき 1 より大 (例えば $\frac{D_x}{D} = 1.5$ のとき 1.150) である。

(3) $\beta = 0.5$ のとき, $A/A_{cro} - W_{av}$ の一例を (f) に示す。 $(A_{cr}/A_{cro})/(A_{cr}/A_{cro})_{iso}$ の $\frac{D_x}{D}$ による変化を (g) に示す。 (g) より各 μ_h に対し $(A_{cr}/A_{cro})/(A_{cr}/A_{cro})_{iso}$ と $\frac{D_x}{D}$ はほぼ直線関係にある。

c $\gamma = 0.2 \cos \alpha, \zeta = 0$

母線縁境界がピンのとき, 一様外圧下では, 近似的に様な軸応力状態が生ずる。このとき, $F'' = -\frac{A}{\mu_h \beta^2}, F' = F'' = 0, W = 0$ であり式 (21) より

$$\left. \begin{aligned} N_1 &= -\frac{E_h t_h^3}{B^2} \frac{1}{2 \sin^2 \alpha} \cdot \frac{A}{\mu_h} \\ N_x &= \frac{E_h t_h^3}{B^2} \cos^2 \alpha \cdot \frac{A}{\mu_h} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (74)$$

となるから母線方向部材には引張力が働くことが定性的に分かる。

斜材, 母線方向部材の断面積を A, A_x とすると, $\gamma = \frac{A_x}{A} \cos \alpha, \zeta = 0$ が成立し, このとき近似的に斜材と母線方向部材の軸応力度比: $|\sigma_{xN}/\sigma_{1N}|$ は式 (74) より, $\frac{A}{A_x} \cos \alpha$ となる。ここでは, $\frac{A_x}{A} = 0.2, \alpha = 45^\circ, 60^\circ, \beta = 1, 1.5, 2.0, \mu_h = 100 \sim 300$ について計算し結果を Fig. 8, 9 に示す。但し計算項数は, ことわりのない限り, $m=2, k_s=k_a=4$ 項とした。結果をまとめると,

(1) $\alpha = 45^\circ$ のときの $A/A_{cro} - \mu_h$ を Fig. 8 (a) に, $A/A_{cro} - W_{av}$ を (b) ~ (d) に示す。 β, μ_h と座屈様式, 座屈モードの半波数: N の関係は次の通りである。 $\beta = 1$ のとき, $100 \leq \mu_h \leq 162.5$ では対称座屈 ($N=3$), $175 \leq \mu_h \leq 250$ では分岐座屈 ($N=4$), $275 \leq \mu_h \leq 300$ では対称座屈 ($N=5$) が生ずる。 $\beta = 1.5, 2.0$ ではともに $\mu_h = 150$ を境にして N は 3 から 5 へと変化し, 分岐座屈 ($N=4$) は生じない。

(2) $\alpha = 60^\circ$ のときの結果を Fig. 9 に示す。

$\beta = 1$ のとき, $\mu_h = 100, 112.5$ では対称座屈 ($N=3$), $125 \leq \mu_h \leq 250$ では分岐座屈 ($N=4$), $\mu_h = 300$ のとき, 対称座屈 ($N=5$) が先行する。 $\beta = 1.5$ のとき, $100 \leq \mu_h \leq 125$ では分岐座屈 ($N=4$), $\beta = 1.5$ かつ $137.5 \leq$

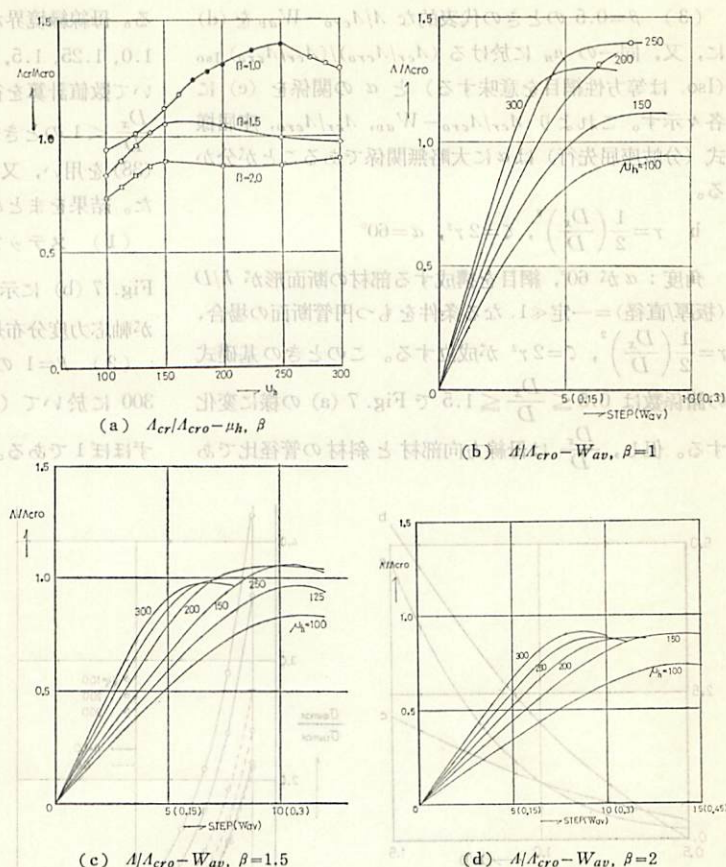


Fig. 8 $\gamma = 0.2 \cos \alpha, \zeta = 0, \alpha = 45^\circ$

$\mu_h \leq 300, \beta = 2$, 且つ $100 \leq \mu_h \leq 300$ では, 対称座屈 ($N=5$) が生ずる。

(3) A_{cr}/A_{cro} は β が増えるにつれ, 小さくなる。又, 同一の β, μ_h に対し, $\alpha = 45^\circ$ の方が A_{cr}/A_{cro} は低い値を与える。

§4 既往実験結果との比較

既に示した如く, 連続体置換によって, 等方性円筒網目シェル屋根の座屈問題は等方性円筒殻のそれに等価である。§4 では, $\gamma = \gamma = 0.5, \alpha = 60^\circ$ の場合の非線形解析結果と既往の等方性部分円筒殻の座屈実験結果とを比較検討する。

a 母線縁フリー

津下⁹⁾は長形円筒型シェルの場合, 座屈前に於ける面内力を梁理論により算定し, この面内力が作用してシェルが座屈すると仮定し, エネルギー法による固有値 (座屈) 解析を行った。さらに鉄板を用いて Table 2 に示される 4 種類の形状寸法をもつ合計 12 個の部分円筒殻を作製し, 周辺が妻側ローラー, 母線縁フリーとなる様工夫し, 空気圧を用いて座屈実験を行い, 理論値と実験値を比較した。津下の理論解析法は仮定上, 座屈前に於いて, (1) 面内力の算定に梁理論を適用, (2) 曲げ応力

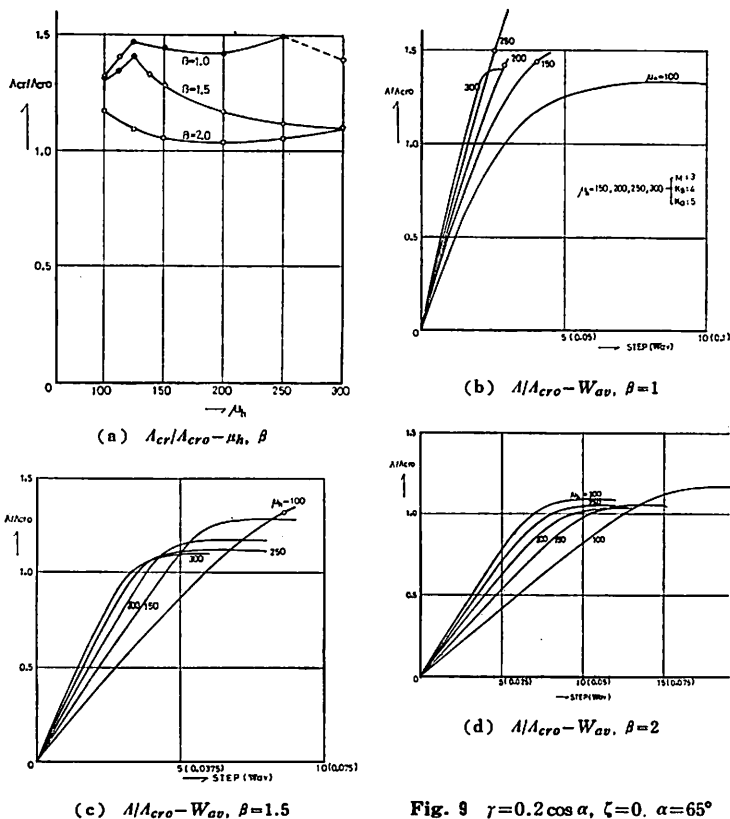


Fig. 9 $\gamma = 0.2 \cos \alpha, \zeta = 0, \alpha = 65^\circ$

を無視、(3) 形状変化を無視しているが、それでも A-10, B-10 の場合、実験値とよく一致している。しかし A-5, B-5 の場合は相違がやや大きく、その理由として板厚 (0.5 mm) が薄いことにより生ずる曲面不整、B-5 についてはさらに解析に用いた計算項数が少ないことを挙げているが、同一モデルの実験値のバラツキが小さいことから判断して、これらの理由は説得性に欠ける。そこで著者は非線形数値解析を行い、Table 2 に示される結果を得た。尚、非線形解析より得られる理論値は解の精度を検討した上で、 $m=3, k_s=k_a=6$ 項のときの値を採用している。Table 2 より、座屈値については、実験

Table 2 ($R=40 \text{ cm}, L=100 \text{ cm}$)

model	shell geometry (in)	experiment (in)	theory (in)	theory (in)	theory (in)	theory (in)	theory (in)	theory (in)	theory (in)
A-10	45	1.0	175.6	110.0	106.6	99.5	98.5	98.5	98.5
A-5	45	0.5	27.6	26.0	27.6	21.0	23.1	23.1	23.1
B-10	60	1.0	152.2	166.2	153.6	150.0	123.4	123.4	123.4
B-5	60	0.5	13.8	23.0	20.0	30.0	19.9	19.9	19.9

Table 3 ($R=18 \text{ in}, B=25.75 \text{ in}$)

NO.	shell geometry (in)	theory (in)	theory (in)	theory (in)	theory (in)	theory (in)	theory (in)	theory (in)	theory (in)
1	0.05	27	1.36	1.4	1.32	1.03	1.11	1.11	1.11
2	0.063	54	1.65	1.6	1.56	1.28	1.06	1.29	1.29
3	0.063	81	1.41	1.2	1.21	1.15	0.99	1.23	1.23
4	0.063	81	1.26	1.2	1.21	1.15	1.04	1.10	1.10

誤差がでたと思われる A-10-I, B-5-I を除いていずれも実験値は理論値より高く、各モデルの平均値と理論値の比率は、A-10, A-5, B-10, B-5 について各々、1.10, 1.17, 1.32, 1.08 である。これは、実験の周辺支持方法が理論仮定の支持条件よりいくらか拘束の程度を強めた為と推察されるが、いずれにせよ、B-10 を除いて理論値と実験値は比較的よく合っている。座屈様式については B-5 を除いて理論値と実験値は一致している。B-5 の場合、理論値は対称座屈が先行するが、数値解析結果を詳細に見れば、対称座屈後のごく近傍で分岐座屈点が存在しており、実験上、対称座屈と逆対称分岐座屈を見分けることは困難と思われる。

T.H. Yang and S.A. Guralnic⁽²³⁾ はアルミニウム板を用いて Table 3 に示される 6 個の部分円筒殻について、妻側ローラー、母線縁フリーの境界条件のもとに、鉛直等分布荷重

を節点荷重に置き換えて座屈実験を行い、これと Donnell 式を差分法によって解いた理論値と比較し、座屈値について良好な一致を示した。これらの結果と著者の行った一様外圧下に於ける理論値と比較し、荷重条件 (鉛直等分布と一様外圧) の座屈荷重に及ぼす影響を検討した。尚、理論値は計算精度を検討した上で、 $m=3, k_s=k_a=6$ のときの値を採用している。Table 3 より荷重条件の相違に拘わらず、一様外圧下の対称座屈値は鉛直等分布の座屈値とよく一致している。しかし、モデル 3, 4, 5, 6 については一様外圧下の場合、対称座屈前に、分岐座屈が発生していること、又実験では座屈値に近づくにつれ逆対称変形の急増が見られることから、実験値と比較すべき一様外圧下の座屈値は分岐座屈値が妥当と思われる。従って、モデル (3,4), (5,6) の実験値/理論値は平均して各々 1.25, 1.16 となり、結局、一様外圧の方がより低い座屈値を与えることが推察される。

b 母線縁固定

横尾、中村⁽¹⁰⁾ は Table 4 に示される 4 種のいずれも底面スパン比が 0.5 のやや長い部分円筒殻について、周辺固定のもと、空気圧を用いて座屈実験を行い、これと Donnell 式の差分法による数値解析結果がかなりよく一致することを示した。同一形状寸法をもち、妻側ローラー、母線縁固定の場合の非線形解析を行い、妻側支持条

Table 4

NO.	R (cm)	fixed end (g/cm ²)		simply supported
		ex.	theory	
1	59.3	14.2	15.3	15.8
2	35.5	31.5	30.0	30.9
3	28.1	43.4	41.5	40.0
4	21.1	63.0	64.0	56.0

[L=40 cm $T_c=0.1$ cm $\tilde{B}=20$ cm $\Theta=\sin \frac{\tilde{B}}{2R}$]

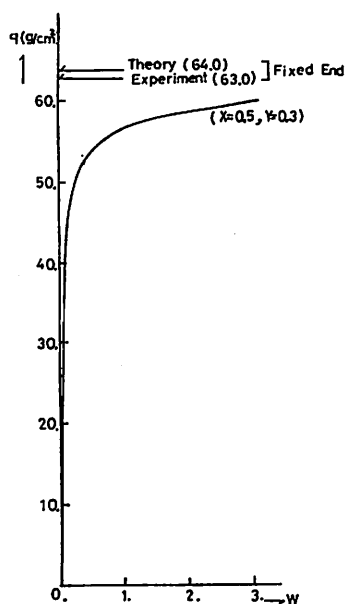


Fig. 10 R=21.1 cm

件（ローラー支持と固定支持）の座屈性状に及ぼす影響を検討する。

Table 3 より妻側ローラーの場合も全て対称座屈が生ずる。R=59.3 cm, 35.5 cm のとき両者は座屈荷重、変位モードともにほぼ一致し、妻側支持条件の差異は認められない。R=28.1 cm のとき、座屈値はほぼ一致するが、座屈時の変位モードは妻側ローラーの場合シェル中央部が上昇し、固定のそれと相違する。R=21.1 cm のとき、座屈値は妻側支持条件の差異が明らかで、ローラー支持のときの座屈値は固定支持のときのそれを下回る。又、座屈時変位モードは概形は両者よく一致している。尚、妻側ローラー、R=28.1 cm, 21.1 cm のとき、Fig. 10 に示される様に最大荷重点が存在しないので、変形急増部分に対応する荷重値を座屈値とした。

§5 まとめ

本論文は論文（その1）で示した連続体置換に基づき導かれる非線形基礎式の数値解析法を用いて、初期曲面不整がなく、妻側でローラー支持された円筒網目シェル屋根の一樣外圧下に於ける対称座屈性状あるいは中央母線に関する逆対称座屈性状を（1）網目パラメータ、（2）母線縁境界条件、（3）シェル形状パラメータ、に着目して理論的解明を試みた。

§2 では、網目が等方性 ($r=\zeta=0.5$, $\alpha=60^\circ$)、母線縁がピン、ローラー、フリー、シェル形状パラメータが $\mu_h=100\sim300$, $\beta=1, 1/1.5, 0.5$ の範囲で数計算を行い、等方性円筒網目シェル屋根の全体座屈性状を明らかにした。主な結果及考察を述べると、

a. 各 β に対し、 $\log \Lambda_{cro}$ と $\log \mu_h$ は直線関係にある。

b. ピンの場合、 $\Lambda_{cr}/\Lambda_{cro}$ は1より大きく、又、座屈様式は、 $\beta=1$ では $\mu_h=175$ を境として、 $\mu_h < 175$ のとき対称座屈 ($N=3$)、 $\mu_h > 175$ のとき分岐座屈 ($N=4$) が各々先行し、 $\beta=1/1.5$ では $\mu_h=100\sim235$ に対し、 $\beta=0.5$ では全ての μ_h に対し対称座屈 ($N=3$) が生ずる。

c. ローラーの場合、 $\Lambda_{cr}/\Lambda_{cro}$ は1より小さく、 β が小さくなるにつれ増える、又、 $\beta=1$, $\mu_h \geq 225$ のとき対称座屈 ($N=3$)、その他のとき分岐座屈 ($N=2$) が先行する。

d. フリーの場合、 $\Lambda_{cr}/\Lambda_{cro}-\mu_h$ 及座屈様式は $\beta=0.5$ 且つ $\mu_h < 150$ を除いて、ローラーの場合とほぼ一致し、又、 $\beta=0.5$ のとき、 $\mu_h < 125$ では対称座屈、 $\mu_h > 125$ では分岐座屈が先行する。

§3 では、網目パラメータが、a. $r=\zeta=\cos \alpha$, $50^\circ \leq \alpha \leq 70^\circ$, b. $r=\frac{1}{2}\left(\frac{D_x}{D}\right)^2$, $0.5 \leq \frac{D_x}{D} \leq 1.5$, $\zeta=28^\circ$, $\alpha=60^\circ$, c. $r=0.2\cos \alpha$, $\alpha=45^\circ, 60^\circ$, $\zeta=0$ の場合について数値計算を行い、網目の直交異方性によって各部材の応力度分布を是正し、あるいは設計自由度を増すことが可能であることを示すと共に全体座屈性状を、同一の μ_h , β をもつ等方性網目との比較に於いて論じた。

§4 では、母線縁がフリー、固定について、既往の等方性部分円筒殻の座屈実験結果と非線形解析より得られる理論値との比較を試み、荷重条件、妻側支持条件の差異による座屈性状の変化を検討した。

円筒網目シェル屋根は自重が軽く、風及雪荷重に対する座屈検討も又極めて重要である。風及雪荷重分布は一般に非対称であり、これにより座屈荷重は低下すると思われる。次報（その3）では荷重分布について母線方向一様、円弧方向に非対称な法線方向荷重を仮定し数値計算を行い、この様な荷重下に於ける座屈性状、特に座屈値の低下について報告する予定である。

謝 辞

本研究を進めるにあたり、御指導頂いた都立大学教授・寺田貞一博士と適切な御助言を頂いた都立大学教授・伊藤文人博士に深く感謝の意を表します。

参 考 文 献

- 津下一英：屋根型円筒シェルの座屈、日本建築学会論文報告集、No. 77, 昭和37年9月
- 横尾、中村他：周辺固定部分円筒殻の飛越座屈の数値解析、日本建築学会学術講演梗概集、昭和46年11月
- 粉川 牧：任意母線縁境界をもつ円筒網目シェル屋根の

- 全体座屈解析 (その1), 日本建築学会論文報告集, 280, pp. 53~65.
- 22) Timoshenko, S. and J.M. Gere : Theory of Elastic Stability. 2nd. McGraw-Hill, pp. 478
- 23) T.H. Yang and S.A. Gulalnick : An Experimental Study of the Buckling of Open Cylindrical Shells, Experimental Mech., April, 1975, pp. 121~127.

SYNOPSIS

U.D.C. : 624.074.4 : 624.075.2

GENERAL BUCKLING OF CYLINDRICAL RETICULATED SHELL ROOFS WITH ARBITRARY GENERATOR EDGES

Part 2 Numerical Analysis

by TSUTOMU KOKAWA, Member of A.I.J.

In this paper, based on the analytical method developed in the previous paper, the general buckling (symmetric buckling or antisymmetric bifurcation buckling with respect to the longitudinal center line) behaviours of C.R.S.R. with simply supported ends, subjected to external pressure, were studied numerically introducing Classical Buckling Pressure (the critical hydrostatic pressure of the full Reticulated Cylindrical Shells), under various (1) reticular parameters, (2) generator edges, (3) shell geometries.

In the §2, the author investigated the general buckling behaviours of C.R.S.R. in the range of (1) $\gamma=\zeta=0.5$, $\alpha=60^\circ$, that to say isotropic, (2) pinned, simply supported, free edges, (3) $\mu_h=100\sim300$, $\beta=1, 1/1.5, 0.5$.

In the §3, the author investigated the general buckling of three types of orthotropic C.R.S.R..

In the §4, the analytical values were compared with experimental values in the case of isotropic with free, fixed generator edges.